物理数学ノート

高橋　康　著

講談社サイエンティフィク

は し が き

あまり切れない，工学部出身の物理系大学院学生に，物理屋の使う数学に関する質問をいろいろと受け，それに答えているうちにこのようなノートができあがった．

切れる学生は，個性にあまり関係なく，何でもわかってしまうのでこのノートは必要ではなかろう．彼らは，ほったらかしておいても自分でどうにかやっていく．一方，あまり切れない学生のほうは，切れなさになかなか個性があり一筋縄ではいかないことが多い．そのような切れない学生にこそ，おおいに独創性を発揮してもらいたいものである．切れない学生の個性は多様だから，切れないすべての学生に焦点を合わせるのはむずかしい．したがって，このノートが，これから物理系大学院修士課程あたりをはじめようという，ある種の切れない学生にだけ役に立てば幸いである．

このノートで取り上げた問題は，たいへん限られている．第1に，応用数学というには厳密さの足りない，たいへん**鷹揚な数学**であることを了解しておいていただきたい．I 章 Lagrangian と Hamiltonian と II 章 Fourier 級数と Fourier 変換とは，物理をやるうえでどうしても知っていなければならない課題である．今さら力学や数学の大きな厳格な教科書を読むには，時間もエネルギーもないといった人々に役に立つことを願う．III章デルタ関数の章は知っていると便利だが，知っていなくてもなんとかいけるであろう．ここでは，デルタ関数の幾何学的応用を主に扱った．この章には，今のところこれといった教科書はみあたらない．このほか，専攻の分野に従ってIV章 回転と回転座標系，V 章 生成・消滅演算子が必要になるかもしれない．これらについてはむずかしい本はたくさんあるが，やはり，これらの課題を成書で勉

強するのはたいへんである．要はたくさん知ることではなく，深く知ることで，この我流のノートがそのためにお役に立てば幸いである．

このノートでは，物理を勉強するとき，あっちこっちで習ったはずの科目のうち，短くまとめた教科書が少ないようなものだけを選んだ．もちろんそのような科目はこれにつきない．例の“切れない学生”がまたいろいろな質問をもってくることであろう．それに答えているうちにII巻ができるかもしれない．

例によってこのノートを執筆中，杜兆華および朱偉国にはたいへんお世話になった．彼らのあいかわらずの親切なあたたかい友情と理解に感謝したい．

1992年1月

高橋　康

エドモントンにて

目　　次

付　録

0．鷹揚数学のすすめ

考えてみれば私はたいへん乱暴な教育を受けたものである．それは第２次世界大戦の真っただ中であったという事情にもよることかもしれないが，とにかく微分積分さえもろくにこなしていないところで，例の高尚なMaxwell方程式を習ったのである．３重積分が出てきたが，その３匹のミミズのようなものが何であるのかさっぱりわからない．先生は，「それは空間中のいろいろな部分の物理量の和と考えてください」とおっしゃる．今にしてみればまったく馬鹿みたいなことである．こんなことわからなくて物理ができるかい，といいたくなるようなことだが，事実自慢じゃないが私自身これがわからなかったのだからおもしろい．

しかしこのような事情は，程度の差こそあれいつになっても治らないものである．世界中の優れた物理学者が，どんどんと新しい数学や未知の技巧を駆使して，新しい大理論を提出してくる．それがすべて難なくわかってしまうなどということはあるはずがない．研究者はそのような事情をどうやって切り抜けていくか？　もちろん，こうすればよいというような簡単な解決法はあるはずがない．ある先生は，そんなこと気にしないで無視していなさいとおっしゃるかもしれない．またある先生は，だからそのつど一生懸命に勉強するんじゃ，といわれるでしょう．別の先生は，だから学生のときにうんと幅広く勉強をしておくことが大切です，と忠告なさるかもしれない．つまり，

解決は各自の個性に合わせてやっていくよりほかにないだろうと思う．そのつど勉強せいといわれても，学生のときちゃんといわれても，たとえある程度知識の集積があっても，やはり基礎的な考え方ができていなかったら，数多い優れた研究者のだす論文の数にはおよぶべくもないだろう．だいたい私自身のことをふりかえってみても，私が研究をはじめてから，以前には全く予期もしなかった数学や技巧がどんどん入ってきたように思う．ああ大学のときにもっと群論をやっておけばよかったとか，トポロジーを勉強しておけばよかったとか微分幾何を学んでおくべきであったとか，後悔することが多いがあとの祭りである．とにかく，数学をあまり知らないで成功した人の例を挙げればきりがないし，また数学をよく知っていたがために成功した例にもことかかないだろう．ついでにいっておくと，数学をよく知っているがためにかえってそれが災いしたという例もたくさんある．

そこであまり悲観しないでちょっと考え直してみよう．なんといっても物理をやりたければ物理に強くなる以外ない．物理学特有の考え方は，はっきり定式化できないので，なかなかなじみにくいものである（数学でも基本的な考え方がたやすく定式化できているとは思わないが）．しかも，物理特有の考え方というのは，科目によってかなり異なっているのではないだろうか．たとえば，熱力学の考え方と電磁気学のそれとの間に共通なものを見つけようとしても，なんとなく漠然と似ているような似ていないような気がして，これといった考え方の相違を見つけることはたいへんであろう．しかし，物理のどんな科目でも平気でこなしていくといった物理学者はめったにいない．やはり得意不得意があり，この人は素粒子のバックグラウンドだとか，彼は物性のバックグラウンドだとかいう考え方の根本的相違が出てくる．たとえばＳ先生の書かれた電磁気学の教科書を見ると，やはりＳ先生の独特の個性と同時に彼のバックグラウンドが出ているし，またＴ先生の電磁気学には同じ電磁気学でもやはり彼なりの個性とバックグラウンドを読み取ることができる．ただ，いろいろな高級数学を習得しても，たいていの場合，高級な数学に引きずられて本質の物理学のほうを離れてしまうことが多い．まあ高級

な数学のことは私もあまり知らないので触れないでおこう．物理屋にとってのパンとバター的な数学に話を限ろう．

では，パンとバター的な数学とはなにかというと，それは微分積分，Fourier積分，簡単な線形代数の知識，それに初歩的な微分方程式の知識くらいではないだろうか．このほか知っていると便利な数学的技巧としては，デルタ関数の取り扱いとか，変分法の初歩とかいったものがある．変分法のついでにちょっと触れておくと，それは解析力学である．理科と文科とを区別するものが微積分だとすると，専門の物理屋とそうでない分野の人とを区別するものは解析力学ではなかろうか．あとは専門の分野に応じてよく使われる数学的技巧を各自勉強するしかないのではなかろうか．

はしがきにも述べたように，このノートは，工学部を卒業して最近物理の大学院へ入ったある学生との会話がもとになっている．彼はまずHamiltonianというものの効用を知らなかったので，まずそれを説明しなければならなかった．それがI章の内容である．彼はFourier 級数や Fourier積分のことはよく知っているようであったが，デルタ関数についてはまだおっかなびっくりのようなので，それを説明するために，II章でちょっと Fourierの理論を復習しなければならなかった．そのついでにGreen関数のことに触れた．III章のデルタ関数の項は，実は私がだいぶ前に面白半分に定式化し，ゼミナールで話をしてそのまま今まで大事にしまっておいたものを紹介した．したがって，これは私の独そう（適当な漢字を当てはめてください）的なもので，私自身はたいへん便利をしている．他の人々にも大いに活用していただきたいと思う．IV章の回転に関する理論はいろいろな意味でたいへん重要なものであろう．回転は群論を勉強するときいちばん簡単かつ具体的な例を提供するからである．ただし，ここでは群論にはいっさい触れなかった．回転群の議論には山内先生の名著があるし，うっかり口を出すとぼろがでてしまうからである．群論の基礎としての回転ではなく，ここでは核磁気共鳴にでてくるBloch方程式や回転Brownian Motionなどを扱うための基礎としての回転を考えた．驚いたことに，スピノールという抽象的なものが核磁気共

鳴の分野で使われているのである．したがって，ここではスピノールというものを紹介した．実は，スピノールというものが核磁気共鳴に使われていることを教えてくれたのは，例の工学部出身の学生である．

最後の章では生成・消滅演算子のことをまったく簡単に議論したが，もちろんこの章の議論だけではあまり簡単すぎて実用にはならない．これから量子光学でも勉強しようかと考えている人たちが，いったい，生成・消滅演算子とはどんなものだろうかという，ざっとしたアイディアを得るためには少しくらい助けになるかもしれないと思ったまでである．もっとちゃんと勉強したかったら，これには枚挙にいとまなしというほどたくさん本が出ている．

とにかく，このノートは，大学で勉強し損ねた人々のために書いたようなものである．したがって，あまり細かい定義とか条件にはこだわらないことにした．それをやりはじめると勉強がいやになる人が多いからである．だいいち私自身がいやになる．たとえばデルタ関数を取り扱うのに，あまり数学的にうるさいことをいい出すと取り扱うのが恐くなる．その意味でこれは応用数学というよりも鷹揚数学といったほうが適当であろう．

I．Lagrangian と Hamiltonian

§1．はじめに

物理系を取り扱う場合，どのような変数で系を記述するかというのは重要な問題である．たとえば，太陽の回りの遊星の問題を解く場合，極座標をとると便利だが，基本になる Newton の方程式は Descartes 座標で簡単な形をしている．それを真正直に，極座標に直すのはなかなかしんどい．この座標変換を Lagrangian の段階で行うと，かなりの計算をはぶくことができる．Hamiltonian までいくと，もっと広い範囲の変数変換が可能となる．

Lagrangian や Hamiltonian の強みは変数変換が簡単になるということに限らない．これらは，与えられた物理系に関する必要な知識全体を含んでいる量で，運動方程式には含まれていないような情報すら含んでいることがある．したがって，物理系を取り扱う場合，Lagrangian か Hamiltonian から出発して，すべての必要な情報をこれらから導き出すようにつとめるほうが無難なのである．その意味で，Lagrangian の（非）対称性から（非）保存量を定義する Noether の定理は特に重要である．簡単に「不変性は保存則を意味する」とよくいわれるが，この命題は，Lagrangian か Hamiltonian があってのことであることを忘れないように．

量子力学は，Hamiltonian の上に組み立てられているから，Hamiltonian

の知識なしには，物理系を量子力学的に取り扱うわけにいかない．そこで，この章では，Lagrangian と Hamiltonian について復習することにする．

§2. Euler-Lagrange 微分

まずはじめに，Euler-Lagrange 微分というものを導入し，変数変換によって，それがどのように変換されるかを調べる．

いま，N個の変数 x_i $(i=1, 2, \cdots, N)$ から別の変数 y_i $(i=1, 2, \cdots, N)$ への変換を考えよう．それら 2 種類の変数が

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_N) \equiv x_i(y_j) \tag{2.1}$$

という関係によって結ばれているとする．また，この関係は逆に解けて

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_N) \equiv y_i(x_j) \tag{2.2}$$

と書けることを仮定する．Descartes 座標 x, y, z から球面座標 r, θ, ϕ への変換を頭においておくとよい．また，変換 (2.1) や (2.2) には時間を陽に含む可能性をゆるしてもよい．変換 (2.1) (2.2) を点変換とよぶことがある．

まず必要な公式を導いておく．式 (2.2) で，y_j は，x_i $(i=1, 2, \cdots, N)$ の関数であり，x_i の時間微分は含まれていないから，直ちに

$$\dot{y}_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\dot{x}_i \tag{2.3}$$

が成り立つ．ここで，˙ は時間微分を意味する．また，式 (2.3) の右辺には添字 i が 2 度使われているが，このようなときには，i について 1 からNまでの和を意味する．これを **Einstein の便法**とよび，物理学ではしばしば使われる便法である．すなわち式 (2.3) とは，

$$\dot{y}_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial y_j}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial y_j}{\partial x_N}\dot{x}_N \tag{2.3'}$$

を意味することを忘れないように．

式 (2.3) あるいは式 (2.3′) を $\dot{x}_i$ $(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N$ のどれか) で微分すると

$$\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \tag{2.4}$$

が得られる．次に，式 (2.3) または式 (2.3′) を x_i ($x_1, x_2, \cdots, x_N$ のどれか) で微分すると

$$\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k}\dot{x}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right] \tag{2.5}$$

が得られる．というのは，最後の括弧の中の量は $x_1, \cdots, x_N$ だけの関数だからである．式 (2.4) と式 (2.5) は，Euler-Lagrange 微分の変換性を知るために必要な公式である．

次に，式 (2.3) にみられるように，$\dot{y}_j$ は $x_1, \cdots, x_N$ とそれらの時間微分の関数であるから，x_i での微分には $\dot{y}_j$ や $\ddot{y}_j$ なども効いてきて，一般に

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\cdots \tag{2.6}$$

と書くことができる．また式 (2.4) により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\cdots\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\cdots\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\cdots\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．ただし，ここで式 (2.4) を用いた．そこで式 (2.6) から式 (2.7) を引くと，式 (2.5) のために，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\right]\\+(\ddot{y}\ \text{についての微分を含む項})\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．ただしここで式 (2.5) を用いた．ここに出てきた

$$\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\ \text{や}\ \frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}$$

を **Euler-Lagrange 微分**とよんでおく．式 (2.8) は，Euler-Lagrange 微分の変換性を示す重要な式である．

いま，$x_1, \cdots, x_N$ とそれらの時間微分だけの関数

$$f(x_1, \cdots, x_N\,;\, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N)$$

を考えよう．変数変換 (2.1) により，これはまた，$y_1, \cdots, y_N\,;\, \dot{y}_1, \cdots, \dot{y}_N$ の関数として表現することができるが，それを

$$g(y_1, \cdots, y_N\,;\, \dot{y}_1, \cdots, \dot{y}_N)$$

とすると，式 (2.8) によって

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right]f(x_1, x_2, \cdots, x_N\,;\, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N)$$
$$=\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\right]g(y_1, \cdots, y_N\,;\, \dot{y}_1, \cdots, \dot{y}_N) \tag{2.9}$$

となる．このように Euler-Lagrange 微分は，$\partial y_j/\partial x_i$ によって結ばれていることがわかる．式 (2.1) が逆に解くことができて式 (2.2) が得られる場合には，$\partial y_j/\partial x_i$ は逆をもつから，式 (2.9) は

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right]f(x_1, \cdots, x_N\,;\, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N)$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\right]g(y_1, \cdots, y_N\,;\, \dot{y}_1, \cdots, \dot{y}_N) \tag{2.9'}$$

と書くこともできる．

Euler-Lagrange 微分には，もう 1 つの著しい性質がある．それは，ある関数の Euler-Lagrange 微分が恒等的に 0 になる場合には，その関数は，ある関数の時間微分であり，逆に，ある関数の時間微分の Euler-Lagrange 微分は恒等的に 0 になるということである．すなわち

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(x_1, \cdots, x_N)\equiv 0$$

である．この証明は，やさしいので各自やってみてほしい．この性質は，あとで，正準変換を議論するとき重要になる．

［例 1］ Descartes 座標と球面座標

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$
$$y=r\sin\theta\sin\phi \tag{2.10}$$

$$
\begin{aligned}
&z=r\cos\theta \\
\therefore\quad &\frac{\partial r}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi \\
&\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\sin\theta\cos\phi}{r} \\
&\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \frac{\partial}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}=&\frac{\partial r}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\right] \\
&+\frac{\partial\theta}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\right]+\frac{\partial\phi}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\right]
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
=\sin\theta\cos\phi&\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\right]+\frac{\sin\theta\cos\phi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\right] \\
&-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\right]
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

y や z についても同様である.

§ 3. Euler-Lagrange の方程式

Euler-Lagrange 微分は，変数変換によって式 (2.9) または式 (2.9′) のように変換する．したがってもし基礎的な物理法則を，ある変数とそれらの時間微分のある関数の Euler-Lagrange 微分が 0 になるように定式化できるならば，その形式は変数の選び方によらない．すなわち，物理法則が

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{y}_i}\right]L(x_j,\ \dot{x}_j)=0 \tag{3.1a}$$

という形で与えられるならば，式 (2.9) によって

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_i}\right]L(x_j,\ \dot{x}_j)=0 \tag{3.1b}$$

が成立することになる．式 (3.1a) の L は式 (2.1) を用いて，y_j と $\dot{y}_j$ で表されたものとする．式 (3.1a) と式 (3.1b) とは，全く同じ物理法則をいっているわけで，変数の組 x_i をとろうが，y_i をとろうが，勝手である．こ

のようなとき，式 (3.1) を **Euler–Lagrange の方程式**とよび，$L(x_j, \dot{x}_j)$ のことを，**Lagrangian** という．

［例 2］

いま，Lagrangian を

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \equiv \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}^2 - V(|\boldsymbol{x}|) \tag{3.2}$$

ととる．$\boldsymbol{x}$ を球面座標で表し，式 (3.2) に代入すると

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2} m \{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\} - V(r) \tag{3.3}$$

となる．式 (3.2) を用いると，Euler-Lagrange の方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right] L = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(|\boldsymbol{x}|) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x_i = 0 \qquad (i=1, 2, 3) \tag{3.4}$$

これは正に，よく知られた Newton の方程式である．

一方，式 (3.3) のほうを用いると

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\right] L = -m\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - \frac{\partial}{\partial r} V(r) = 0 \tag{3.5a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\right] L = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\theta}] + mr^2\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = 0 \tag{3.5b}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\right] L = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\phi} \sin^2\theta] = 0 \tag{3.5c}$$

これらが，球面座標を採用したときの運動方程式で，式 (3.4) の線形結合である．式 (3.4) を球面座標に直そうとするとたいへん手間がかかるが，Lagrangian の段階で球面座標に変換するのは，それに比べて比較的簡単である．というのは，運動方程式 (3.4) は 2 階の時間微分を含んでいるが，Lagrangian (3.2) には 1 階微分しか含まれていないからである．

注 意

(1) なお，この場合，Lagrangian (3.2) は，運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V を用いて，

$$L = T - V \tag{3.6}$$

という形をしている。簡単な物理系では，Lagrangian は，多くの場合式(3.6)の形をしている。ただし，一般の物理系では，必ずしも Lagrangian は式(3.6)の形をもつとはかぎらない。（例4を見よ）。

(2) 式 (3.3) にみられるように，角 ϕ は Lagrangian の中に生で入っていない。その時間微分 $\dot{\phi}$ が入っている。このような一般座標を，**循環座標**または **ignorable な変数**とよぶ。このような変数については，Lagrangian の Euler-Lagrange 微分の第1項は常に消えるから，運動方程式は「ある量の時間的変化が常に0」という形になる。つまり，ある量が保存される。たとえば (3.5c) は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta]=0 \tag{3.7}$$

であり，これは，z 軸の回りの角運動量が保存するという表現である。また，Lagrangian (3.2) でポテンシャルエネルギーを0とすると，$\boldsymbol{x}$ は循環座標になり，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{\boldsymbol{x}}]=0 \tag{3.8}$$

が得られる。これは，運動量保存則にほかならない。

[例 3] 2粒子系の Newton の方程式

次にもう少し複雑な系として，2粒子がポテンシャルによって相互作用している系を考えよう。各粒子の質量をそれぞれ m_1，m_2 とすると，式 (3.6) により，

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)2}+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)2}-V(|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)}|) \tag{3.9}$$

と，とるのがよいだろう。すると，Euler-Lagrange の方程式は，

$$\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(1)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}}\right]L=-m_1\ddot{\boldsymbol{x}}^{(1)}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(1)}}V(|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)}|)=0 \tag{3.10}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(2)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}}\right]L=-m_2\ddot{\boldsymbol{x}}^{(2)}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(2)}}V(|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)}|)=0 \tag{3.11}$$

となる。これらの方程式を加え合わせると，直ちに

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}+m_2\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}]=0 \tag{3.12}$$

という，運動量の保存則が得られる．

この系については，重心座標

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{M}(m_1\boldsymbol{x}^{(1)}+m_2\boldsymbol{x}^{(2)}) \tag{3.13a}$$

と相対座標

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)} \tag{3.13b}$$

を導入し，Lagrangian を

$$L=\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{X}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{x}}^2-V(|\boldsymbol{x}|) \tag{3.14}$$

と書くこともできる．ただし

$$M\equiv m_1+m_2 \tag{3.15}$$

は，**全質量**であり，

$$\mu\equiv m_1m_2/M \tag{3.16}$$

は**換算質量**である．Lagrangian (3.14) をみてすぐわかることは，$\boldsymbol{X}$ が循環座標になっているということで，その Euler-Lagrange の方程式として，運動量保存則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{\boldsymbol{X}}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}+m_2\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}]=0$$

が得られる．

[例 4] 電磁場の中の荷電粒子

荷電粒子の位置を $\boldsymbol{x}(t)$，ベクトルおよびスカラーポテンシャルをそれぞれ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$，$\phi(\boldsymbol{x},t)$ としたとき，Lagrangian を

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)-e\phi(\boldsymbol{x}(t),t)+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{3.17}$$

とおいてみる．$\boldsymbol{A}$ や ϕ は，荷電粒子の位置における値をとる．式 (3.17) から，Euler-Lagrange の方程式を作ったとき，それが，ちょうど Lorentz 力の働いた荷電粒子の運動方程式になっていれば，式 (3.17) は一応正しい

Lagrangianと考えられる．Euler-Lagrangian微分は，$\boldsymbol{A}$ やϕ の中の$\boldsymbol{x}(t)$にもかかることに注意すると，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right]L=-e\frac{\partial}{\partial x_i}\phi+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{A}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\dot{x}_i+\frac{e}{c}A_i\right]$$

$$=-m\ddot{x}_i-e\frac{\partial}{\partial x_i}\phi+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{A}-\frac{e}{c}\left[\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla A_i+\frac{\partial}{\partial t}A_i\right]$$

$$=-m\ddot{x}_i+eE_i(\boldsymbol{x}(t),t)+\frac{e}{c}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(t),t)]_i=0 \tag{3.18}$$

ただし，ここで，Gauss単位系を採用し

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \tag{3.19a}$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.19b}$$

を用いた．

(3.19)はちょうどLorentz力の働いた荷電粒子の運動方程式である．したがって，(3.17)は正しいLagrangianである．(とは実は言い切れないが，この場合には正しいLagrangianである．)

§4．Noetherの定理

今までLagrangianの理論を簡単にながめてきた．ただし，ここでは主として，LagrangianのEuler-Lagrangeの方程式として，運動方程式を導くという点に議論を集中してきた．Euler-Lagrangeの方程式は，変数の選び方によらずに成立するということが第1の特徴であって，物理系を記述するためには，式 (2.1) の変換で結ばれているかぎり，どんなものでもよい．しかも，Lagrangianは通常，変数の1回時間微分までしか含んでいないから，Lagrangianの段階で変数変換をするのは比較的容易であるという利点もある．

しかし，この点だけを利用していただけではLagrangianは一義的に決められない．つまり，同じ運動方程式を与えるLagrangianはたくさん存在しうる．この点を理解するために，次のようなLagrangianを考えてみよう．

$$L_2=m\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}+V(|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|) \tag{4.1}$$

Euler-Lagrangeの方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(1)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}}\right]L_2=-m\ddot{\boldsymbol{x}}^{(2)}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(1)}}V(|x^{(1)}-x^{(2)}|)$$
$$=-m\ddot{\boldsymbol{x}}^{(2)}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(2)}}V(|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)}|)=0 \tag{4.2}$$

同様に

$$\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(2)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}}\right]L_2=-m\ddot{\boldsymbol{x}}^{(1)}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(1)}}V(|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)}|) \tag{4.3}$$

である．これらの方程式は(3.10)，(3.11)で$m_1=m_2=m$としたものと完全に一致している．したがって，$m_1=m_2=m$であるかぎり，Lagrangian(3.9)と(4.1)は，まったく同一の運動方程式を与え，この段階では，区別がつかない．ということは，逆にいうとLagrangianには運動方程式以外の情報が入っているということである．特に重要なのは，Lagrangianの中に入っている，対称性に関する情報である．これを議論するのが，Noetherの恒等式およびそれから出てくるNoetherの定理である．Noetherによると，Lagranianの対称性と保存則は，次のように結ばれている．

いま，無限小変換

$$q_i \to q_i'=q_i+\delta q_i \tag{4.4}$$

を考える．すると

$$L(q_i',\dot{q}_i')-L(q_i,\dot{q}_i)=\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i$$
$$=\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right] \tag{4.5}$$

という恒等式が成り立つ．これを**Noetherの恒等式**とよぶ．これは何を物語っているかというと，もし式(4.5)の左辺が0ならば，いいかえると，変換(4.4)によってLagrangianが不変ならば，Euler-Lagrangeの方程式の成り立つところで，量

$$N \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \tag{4.6}$$

が保存する．式（4.6）をかりに **Noether charge** とよんでおく．いま，

$$L(q_i', \dot{q}_i') - L(q_i, \dot{q}_i) \equiv Q \tag{4.7}$$

とおくと，式（4.5）は Euler-Lagrange の方程式の成り立つところで

$$Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N \tag{4.5'}$$

が成り立ち，$Q=0$ ならばNの時間微分が 0，つまりNは時間的に一定である．これを **Noether の定理**という．

［例 5］

2粒子系の Lagrangian（3.9）は，空間推進

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} &\longrightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} &\longrightarrow \boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \tag{4.8}$$

に対して不変である．この場合，Noether charge

$$\begin{aligned} N &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}} \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \boldsymbol{\epsilon} \cdot [m_1 \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} + m_2 \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}] \end{aligned} \tag{4.9}$$

は全運動量であり，これが保存するのは Lagrangian が空間推進（4.8）に対して不変であったからである．もしポテンシャルVが $|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}|$ の関数ではなく，$\boldsymbol{x}^{(1)}$ と $\boldsymbol{x}^{(2)}$ の任意の関数であったならば，Lagrangian は，空間推進に対して不変ではなく，したがって Noether の恒等式（4.5）または（4.5′）により運動量は保存しない．

式（4.9）の中の $\boldsymbol{\epsilon}$ は定数だから，それを除き

$$\boldsymbol{p} = m_1 \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} + m_2 \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} \tag{4.10}$$

で，この2粒子系の全運動量を定義する．

［例 6］

1粒子の Lagrangian（3.2）は，軸 $\boldsymbol{e}$ の回りの無限小回転

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e} \delta \theta \tag{4.11}$$

に対して不変である．したがって Noether charge

$$N=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e})\cdot m\dot{\boldsymbol{x}}\delta\theta=\delta\theta\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}\times m\dot{\boldsymbol{x}}) \tag{4.12}$$

は保存する．$\boldsymbol{e}$ は定数だから，角運動量

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{x}\times m\dot{\boldsymbol{x}} \tag{4.13}$$

が保存する．

この場合にも，ポテンシャルが r のみの関数だったので，角運動量(4.13)が保存量となったわけである．

注 意

(1) Noether の定理は，もし Lagrangian がある変換に対して不変なら，保存量が存在することを主張しているのであって，運動方程式の不変性をいっているのではない．この点をよく忘れるが，ここで1つ反例を挙げておくと，地球上での落体の方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mg$$

で，これは空間推進に対して明らかに不変である．しかし，われわれがよく知っているように，この場合，落体はどんどん運動量を増していく．この場合の Lagrangian を作ってみると，それが空間推進に対して不変でなくなっているということがすぐわかる．

(2) 2粒子系の Lagrangian を2個考えたが，つまり式 (3.9) と式 (4.1) がまったく同一の運動方程式を与えることをみてきたが，対称性の立場からすると，式 (3.9) と式 (4.1) とはだいぶ異なっている．たとえば式 (3.9) の運動エネルギーのほうは

$$\delta\boldsymbol{x}^{(1)}=\alpha\boldsymbol{x}^{(2)}$$
$$\delta\boldsymbol{x}^{(2)}=-\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}$$

に対して不変にできているが，式 (4.1) のほうは，そうなっていない．実は，式 (4.1) のほうはそれ以外に悪いところがあるのである．それをみるには，式 (4.1) を重心座標と相対座標で書き直してみるとよい．これは練習問題にしておく．

(3) ここで，§3の循環座標から保存則が出てきた事情をふり返ってみよう．循環座標を q とすると，それは Lagrangian の中に生には入っていなくて，その時間微分が入っている．つまり，循環座標については，変換

$$q \longrightarrow q+\alpha$$

(α は定数) に対して Lagrangian が不変にできていたわけで，したがって，Noether により保存則が出てきたのである．

§5. Hamiltonian

さて，今までの議論では，変数変換 (2.1) によって，Euler-Lagrange の方程式が不変であるということが基礎になっている．この変数変換 (2.1) というのは，通常，点変換といわれているもので，かなり特別の種類の変数変換である．たとえば，x_i は，y_j の関数で，y_j の時間微分を含んではいけない．

変数変換を，変数の時間微分まで含む広い範囲の変数変換に拡張するにはどうしたらよいか．たとえば

$$x_i = x_i(y_j,\ \dot{y}_j)$$
$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(y_j,\ \dot{y}_j)$$

のような変数変換に対して，不変な形に理論が再構成できると，前節までに展開した Lagrange 形式の理論よりもっと便利な理論ができるにちがいない．Hamiltonian 形式の理論というのが，これに答えるものである．

まず，Hamiltonian を

$$H(p,\ q) = [p_i\dot{q}_i - L(q_j,\ \dot{q}_j)]_{\dot{q}\to p} \tag{5.1}$$

で定義する．この右辺の $[\cdots]_{\dot{q}\to p}$ というのは次のような操作を意味する．まず，Lagrangian から，

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_j,\ \dot{q}_j) \tag{5.2}$$

を定義する．この右辺は q_j と $\dot{q}_j$ との関数だが，これが，$\dot{q}_j$について逆に解け

$$\dot{q}_j=\dot{q}_j(q_i, p_i) \tag{5.3}$$

となることを仮定しよう．すなわち $\dot{q}_j$ はq_i とp_i との関数で与えられるとする．この関係式 (5.3) を用いて，式 (5.1) の[…]の中の量を，q_j と p_j の関数として表す．それが式 (5.1) の左辺の $H(p, q)$ である．このとき，式 (5.2) で定義された p_i をq_i **に正準共役な運動量**とよび，式 (5.1) で定義された q_i と p_i との関数 $H(p, q)$ を **Hamiltonian** とよぶ．

[例 7]

Lagrangian (3.2) より

$$q_i \equiv x_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

とおくと，

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m\dot{x}_i$$

これを逆に解くと

$$\dot{x}_i=\frac{1}{m}p_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

したがって

$$\begin{aligned} H(p, q) &= [p_i\dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j)]_{\dot{q}\to p} \\ &= \frac{1}{m}p_ip_i - \frac{1}{2m}p_ip_i + V(r) \\ &= \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(r) \end{aligned} \tag{5.4}$$

これが，1粒子系の Hamiltonian である．

注 意

なぁんだ，Hamiltonian とはエネルギーのことじゃあないか…，というのは早合点である．Hamiltonian とエネルギーとは多くの場合一致するが，特に量子力学ではそうだが，実は，Hamiltonian というときには，それが一般化座標 q_i と共役運動量 p_i にどのように依存しているかということが重大なのであって，実際の運動が実現されたとき，Hamiltonian の数値がエネルギーと一致するということは二の次である．たいへんもったいぶっているよう

だが，Hamiltonian という場合には，q_i と p_i の関数として，実際に起こる運動よりも広い変数の変化を考えているのである．この点，Lagrangian でも同じで，Lagrangian を書いた段階では，これは，実際の運動とは一応別物で，Lagrangian の Euler-Lagrange 微分を 0 とおいたとき，実際の運動がどのように実現されるかがわかるわけである．式 (5.1) によって Hamiltonian が得られた段階では，現実に起こる運動とは一応関係はない．そこでなんらかの制限を Hamiltonian に加え，そのとき，現実の運動が記述できることになる．この制限をどのように加えるかは，これが Lagrangian によって式 (5.1) で定義されていることから出てくるはずである．それを議論する前にもう 2 つ例を挙げておく．

［例 8］

Lagrangian (3.3) をとり

$$q_1 \equiv r, \quad q_2 \equiv \theta, \quad q_3 \equiv \phi$$

とする．すると，これらの変数に共役な運動量は

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \dot{r} = \frac{1}{m}p_r, \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{mr^2}p_\theta, \qquad \dot{\phi} = \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}p_\phi$$

したがって

$$H = [p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L]_{\dot{q}\to p}$$
$$= \frac{1}{2m}\left\{p_r{}^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta{}^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi{}^2\right\} + V(r) \tag{5.5}$$

が Hamiltonian ということになる．

［例 9］

荷電粒子については

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = m\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t), t) \tag{5.6}$$

(これは，運動量が質量と速度の積になっていない例)．そして

$$H=\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t),t)\right]^2+e\phi(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{5.7}$$

が Hamiltonian である．

この Hamiltonian をみればわかるように，これが $\boldsymbol{p}$ にどのように依存しているかということが重要であって，これを式 (5.6) を用いて速度で表してしまうと

$$H=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2+e\phi(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{5.8}$$

となり，前の式 (5.4) を速度で書いたものと等しくなってしまう．実はすぐ後で説明するように Hamiltonian (5.7) には，速度が式 (5.6) であるという情報がすでに入っているのであって，式 (5.8) の形に直してはいけない．

§6．Hamiltonian の役割

§5 では，Lagrangian が与えられたとき，式 (5.1) によって Hamiltonian を定義した．では，Hamiltonian はいつでも Lagrangian から式 (5.1) によって定義されるのかというとそうではない．$H(p,q)$ が先に与えられても一向にかまわない．以下では，$H(p,q)$ が与えられたとき，

$$p_i\dot{q}_i-H(p,q) \tag{6.1}$$

という量の Euler-Lagrange の方程式が，点変換より広い変数変換に対して不変であり，かつ，式 (5.1) が成り立つときには，これが，Lagrangian の Euler-Lagrange の方程式と一致する，ということを証明する．式 (6.1) という量は，q_i と p_i という $2f$ 個の変数および $\dot{q}_i$ を含んでいる．いま

$$\begin{aligned} x_i&=q_i \\ x_{f+i}&=p_i \end{aligned} \qquad (i=1,2,\cdots,f)$$

とすると，式 (6.1) の Euler-Lagrange 微分は

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\right]\{p_k\dot{q}_k-H(p,q)\}$$
$$=-\left\{\dot{p}_i+\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_i}\right\} \tag{6.2a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{p}_i}\right]\{p_k\dot{q}_k-H(p,q)\}$$

$$=\left\{\dot{q}_i-\frac{\partial H(p,q)}{\partial p_i}\right\} \tag{6.2b}$$

である．これらの微分が0であるということを**要求する**と，正準方程式

$$\dot{p}_i+\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_i}=0 \tag{6.3a}$$

$$\dot{q}_i-\frac{\partial H(p,q)}{\partial p_i}=0 \tag{6.3b}$$

が得られる．

[例 10]

前節の式 (5.7) という Hamiltonian が与えられたとしよう（これがどうして作られたかということは一応問わないことにして）．式 (6.3b) によると

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{1}{m}\left\{p_i-\frac{e}{c}A_i(\boldsymbol{x}(t),t)\right\}$$

となり，式 (5.6) が得られる．一方，式 (6.3a) によると

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$=\frac{1}{m}\left(p_j-\frac{e}{c}A_j\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-e\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

が得られるから，これら2式をひとつにすると運動方程式(3.18)に到達する．これは自らやってみてほしい．この場合，$\boldsymbol{A}$ や ϕ が $\boldsymbol{x}$ を通じて時間に依存していることを忘れないように．

そこで，正準方程式 (6.3) は，Hamiltonian が Lagrangian から式 (5.1) によって定義された場合には，Lagrangian に対する Euler-Lagrange の方程式と同等であるということを証明しよう．

そのために，q_i と p_i とを独立に

$$q_i \longrightarrow q_i+\eta_i$$

$$p_i \longrightarrow p_i+\zeta_i$$

と変化させる．この場合，$\dot{q}_i$ は，q_i と p_i の関数とみなすと

$$\dot{q}_i \longrightarrow \dot{q}_i + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}\eta_j + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}\zeta_j$$

である．そこで式（5.1）を，$\dot{q}_i$ を通して q_i と p_i に依存する場合と，直接 q_i，p_i に依存する場合と，2様に計算してみる．$\dot{q}_i$ を通して q_i と p_i とに依存するとすると

$$\begin{aligned} H(p+\zeta, q+\eta) &= H(p, q) + \zeta_j \dot{q}_j + p_j\left\{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\eta_k + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k}\zeta_k\right\} \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial q_k}\eta_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left\{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\eta_k + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k}\zeta_k\right\} \\ &= H(p, q) + \dot{q}_k\zeta_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\eta_k \\ &\quad + \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\left\{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\eta_k + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k}\zeta_k\right\} \end{aligned} \tag{6.4}$$

一方，q_i と p_i に直接依存するとすると

$$H(p+\zeta, q+\eta) = H(p, q) + \frac{\partial H}{\partial p_k}\zeta_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\eta_k \tag{6.5}$$

式（6.4）と式（6.5）は，結局同じことであるはずであるから η_k と ζ_k の係数を別々に比較すると

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} + \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \tag{6.6a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \tag{6.6b}$$

が得られる．これは，関係式 (5.1) の帰結である．そこで，p_i についての式 (5.2)，および Lagrangian に関する Euler-Lagrange の方程式を用いると，式（6.6）は

$$\frac{\partial H(p. q)}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \tag{6.7a}$$

$$\frac{\partial H(p, q)}{\partial p_k} = \dot{q}_k \tag{6.7b}$$

となる．つまり，Lagrangian に関する Euler-Lagrange の方程式および共役運動量の定義式（5.2）とは，正準方程式（6.7）と全く同等である．したが

って，Hamiltonian が，p と q の関数で与えられているときには，Lagrangian との関連は気にしないで，正準方程式（6.7）を要求しさえすればよい．実は，正準方程式（6.7）は，式（6.2）が示すように，$p_j\dot{q}_j-H(p, q)$ の Euler-Lagrange の方程式だったわけである．

［例 11］ ポテンシャル中の1粒子

この場合，Hamiltonian（5.4）をとると，正準方程式は

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}=-\nabla V(r) \tag{6.8a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}=\frac{1}{m}\boldsymbol{p} \tag{6.8b}$$

となる．

［例 12］ 球面座標系における1粒子

Hamiltonian（5.5）より

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{m}\frac{1}{r^3}\left\{p_\theta{}^2+\frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi{}^2\right\}-\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \tag{6.9a}$$

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{1}{m}p_r \tag{6.9b}$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{1}{m}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}p_\phi{}^2 \tag{6.10a}$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{1}{m}\frac{1}{r^2}p_\theta \tag{6.10b}$$

$$\dot{p}_\phi=-\frac{\partial H}{\partial \phi}=0 \tag{6.11a}$$

$$\dot{\phi}=\frac{\partial H}{\partial p_\phi}=\frac{1}{m}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi \tag{6.11b}$$

これらの方程式が，Euler-Lagrange の方程式（3.5）および共役運動量の定義と同等であるということはすぐわかると思う．

例 12 から Hamiltonian の p, q 依存性さえわかれば，いちいち Lagrangian に戻る必要がないこともすぐわかると思う．したがって，物理系が与えられたときには，正準方程式として運動方程式が得られ，それ以外に必要な

対称性などが満たされるように Hamiltonian を作ってやればよい．この場合，できるだけ簡単な一般化座標と共役運動量で取り扱い，それから変数変換すればよい．たとえば，1粒子系の例12では，直線直交座標を用いて Hamiltonian (5.4) を作るのはやさしいが，はじめから球面座標を用いて，式 (5.5) を得るのはちょっとむずかしいと思う．

それでは，正準方程式は，どのような変数変換に対して不変なのであろうか？ これを次の§7で考えてみよう．

§7. 正 準 変 換

§6の議論によると，正準方程式は，式 (6.1) という量の Euler-Lagrange の方程式として得られたのだから，§2の議論によって，それは，p と q をいっしょにしてまぜあわせる変換

$$p_i = p_i(P, Q, t) \qquad (i=1, 2, \cdots, f) \tag{7.1a}$$

$$q_i = q_i(P, Q, t) \tag{7.1b}$$

に対して不変であろうことは容易に想像がつく．が，しかし，式 (7.1) のような全く勝手な変換をしたのでは，式 (6.1) の量が新しい変数 P_i と Q_i で表したとき，同じような形をしなくなるかもしれない．Euler-Lagrange 微分の一般論によって，ある関数の時間微分の Euler-Lagrange 微分は恒等的に 0 だから，式 (6.1) という量を P_i, Q_i で表したとき

$$p_i\dot{q}_i - H(p, q) = P_i\dot{Q}_i - K(P, Q) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_1(q, Q, t) \tag{7.2}$$

であるならば，新しい Hamiltonian $K(P, Q)$ についても，正準方程式が成り立つことになる．これを直接みるためには，

$$\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\left(\frac{\partial}{\partial Q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_j}\right) + \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\left(\frac{\partial}{\partial P_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{P}_j}\right) \tag{7.3a}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial Q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_j}\right)$$

$$+\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial P_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{P}_j}\right) \tag{7.3b}$$

を用いる．式（7.2）右辺第2項は，Euler-Lagrange 微分に効かないから式（7.3）より

$$-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=-\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\left(\dot{P}_j+\frac{\partial K}{\partial Q_j}\right)+\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\left(\dot{Q}_j-\frac{\partial K}{\partial P_j}\right) \tag{7.4a}$$

$$\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)=-\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\left(\dot{P}_j+\frac{\partial K}{\partial Q_j}\right)+\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\left(\dot{Q}_j-\frac{\partial K}{\partial P_j}\right) \tag{7.4b}$$

となる．したがって，正準方程式 (6.7) が成り立つとき，Kに対しても正準方程式が成立する．（ただし変換（7.1）が逆をもつことを仮定した．）逆も真理で，Kに対して正準方程式が成り立つならば，Hに対しても正準方程式が成立する．すなわち，**式（7.2）が成り立つ範囲で，変数変換（7.1）は，正準方程式を不変**に保っている．この範囲に属する変換を**正準変換**という．

条件（7.2）は2個の式に分解できて，

$$p_i\mathrm{d}q_i-P_i\mathrm{d}Q_i=\mathrm{d}W_1(q,\,Q,\,t) \tag{7.5a}$$

$$K(P,\,Q)-H(p,\,q)=\partial_t W_1(q,\,Q,\,t) \tag{7.5b}$$

と書くことができる．式（7.5a）の右辺はqとQについてだけの変化を意味し，式（7.5b）の右辺は，Wに陽に含まれている時間についての微分を意味する．式 (7.5a) は，いわば，正準変換の条件式，式 (7.5b) は Hamiltonian の変化を示す式である．式（7.5a）のほうは

$$p_i=\frac{\partial W_1(q,\,Q,\,t)}{\partial q_i} \tag{7.6a}$$

$$P_i=-\frac{\partial W_1(q,\,Q,\,t)}{\partial Q_i} \tag{7.6b}$$

と書いてもよい．この方程式の意味するところは，まず式（7.6a）を Q_i について解き

$$Q_i=Q_i(p,\,q,\,t)$$

を得る．これを式（7.6b）に代入して

$$P_i=P_i(p,\,q,\,t)$$

を得るという意味である.

式 (7.6) を満たすような関数 W_1 の存在によって，変数変換が正準変換であることを保証することができる.

注 意

(1) 式 (7.1) の形のすべての変換ではなく，そのうち式 (7.5a) を満足する $W_1(q, Q, t)$ という関数が存在するときだけ，正準方程式は不変である.

(2) 条件式 (7.5a) や (7.6) は，ちょっと抽象的でわかりにくいかもしれない. 事実，古典力学ではそうである. 式 (7.6a) を積分すると，p_i が q と Q の関数で得られ，式 (7.6b) のほうを積分すると，P_i が q と Q の関数として得られるので，式 (7.1) の形に直すのに少々骨が折れることがある. 量子力学にいくと，正準変換はもう少し簡単になる. したがって，ここでは古典力学のややこしい例は挙げない. 簡単な例としては，1次元で

$$W_1 = -qQ$$

をとると，式 (7.6a) により

$$p = -Q$$

(7.6b) により

$$P = q$$

となり，これは正準変換である. 調和振動子

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

をとり，これを P と Q で表して，K を作り正準方程式を作って試してみるとよい.

(3) 正準変換について2，3の性質を述べると，

(a) 運動自身は正準変換である. つまり

$$q(t) \longrightarrow q(t+\delta t)$$
$$p(t) \longrightarrow p(t+\delta t)$$

は正準変換である.

(b) §6の例11，12の座標 ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$) と座標 ($r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi$) は正準変

換で結ばれている．

(c) すべての正準変換は群をなす．つまり，いつでも逆変換があり，2個の正準変換を続けて行うと，また1個の正準変換になる．

§8. 無限小正準変換

いろいろな物理量（運動量とか角運動量など）を定義する場合，無限小正準変換は重要である．これを以下に示すが，そのほか，無限小変換の重要性は，正準変換が群をなすということにもとづいている．そのために，無限小変換を重ねて有限の正準変換を作ることができるからである．

いま式（7.2）において

$$W_1 \equiv -P_i Q_i + W_2(P, q\,;\,t) \tag{8.1}$$

とおくと，

$$p_i \dot{q}_i - H(p, q) = -\dot{P}_i Q_i - K(P, Q) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2(P, q\,;\,t) \tag{8.2}$$

となる．これは，例によって2つの式

$$p_i \mathrm{d}q_i + \mathrm{d}P_i Q_i = \mathrm{d}W_2(P, q, t) \tag{8.3a}$$

$$H(p, q) - K(P, Q) = \partial_t W_2(P, q, t) \tag{8.3b}$$

となるが，式（8.3a）のほうは

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial q_i} \tag{8.4a}$$

$$Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} \tag{8.4b}$$

を意味する．これも，式(7.6)と同様，正準変換の異なった条件である．次に，無限小変換

$$q_i \longrightarrow Q_i = q_i + \delta q_i \tag{8.5a}$$

$$p_i \longrightarrow P_i = p_i + \delta p_i \tag{8.5b}$$

を考えよう．δq_i と δp_i は，与えられた無限小量である．そこで

$$W_2(P, q, t) \equiv P_i q_i + \epsilon G(p, q, t) \tag{8.6}$$

とおく．ϵ は無限小変換に含まれた無限小のパラメーターである．式(8.6)

を式 (8.4) に代入，高次の無限小を省略すると

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{8.7a}$$

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{8.7b}$$

が得られるから，式 (8.5) と比較して

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(p, q, t)}{\partial p_i} \tag{8.8a}$$

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(p, q, t)}{\partial q_i} \tag{8.8b}$$

となる．これは，無限小変換 (8.5) が正準変換である条件で，Gのことを無限小正準変換の**母関数**（**generator**）とよぶ．

[例 13]

2 粒子系において座標の推進を行うと，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} &\longrightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} &\longrightarrow \boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \tag{8.9}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ は座標の推進である．運動量はこの場合，変換を受けず

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^{(1)} &\longrightarrow \boldsymbol{p}^{(1)} \\ \boldsymbol{p}^{(2)} &\longrightarrow \boldsymbol{p}^{(2)} \end{aligned} \tag{8.10}$$

だから式 (8.8) により，母関数は

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\boldsymbol{p}^{(1)} + \boldsymbol{p}^{(2)}) \tag{8.11}$$

で決まる．事実

$$\delta \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}^{(1)}} (\epsilon \cdot \boldsymbol{G}) \tag{8.12}$$

が成り立っている．第 2 の粒子に対しても同様である．この場合には，母関数は全運動量という意味をもつ．

[例 14] Galilei 変換

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(i)} &\longrightarrow \boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{v} t \\ \boldsymbol{p}^{(i)} &\longrightarrow \boldsymbol{p}^{(i)} + \boldsymbol{v} m_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{8.13}$$

を考える．$\boldsymbol{v}$ は無限小速度である．母関数は

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{v}\cdot\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{p}^{(i)}t+\boldsymbol{x}^{(i)}m_i) \tag{8.14}$$

で，この場合には，母関数が時間を生に含んでいる．したがって，Hamiltonian は，それに従って変化を受ける．式（8.3b）により

$$K=H-\boldsymbol{v}\cdot\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}^{(i)} \tag{8.15}$$

である．

［例 15］

軸 $\boldsymbol{e}$ の回りの無限小回転を考えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&\longrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\delta\theta\\ \boldsymbol{p}&\longrightarrow \boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\delta\theta\end{aligned} \tag{8.16}$$

で，母関数はすぐわかるように

$$G=\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}) \tag{8.17}$$

となる．これは角運動量の $\boldsymbol{e}$ 方向の成分である．この場合，Hamiltonian は変わらない．式（8.16）の回転についてはIV章で詳しく調べる．

§9. Poisson 括 弧

Poisson 括弧の概念は，量子力学や場の量子論へいく場合，特に重要である．

いま，正準変数 p と q に依存する 2 個の関数を考える．すなわち

$$A=A(p_1, p_2, \cdots, p_f\,;\, q_1, q_2, \cdots, q_f)=A(p, q) \tag{9.1a}$$

$$B=B(p_1, p_2, \cdots, p_f\,;\, q_1, q_2, \cdots, q_f)=B(p, q) \tag{9.1b}$$

これらの Poisson 括弧を

$$[A, B]_c=\sum_{i=1}^{f}\left\{\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right\} \tag{9.2}$$

で定義する．いうまでもなく，すべての q とすべての p は独立変数である．たとえば

$$[p_i, p_j]_c = \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right\} = 0 \tag{9.3a}$$

$$[p_i, q_j]_c = \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right\} = -\delta_{ij} \tag{9.3b}$$

$$[q_i, q_j]_c = \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right\} = 0 \tag{9.3c}$$

である。

Poisson 括弧の性質を証明なしにならべておくと，

(i)

$$[A, B]_c = -[B, A]_c \qquad \therefore \quad [A, A]_c = 0$$

(ii)

$$[A, c, B + c_2 C]_c = c_1[A, B]_c + c_2[A, C]$$

ただし，c_1，c_2 は単なる定数である。

(iii) Jacobi の恒等式

$$[A, [B, C]_c]_c + [B, [C, A]_c]_c + [C, [A, B]_c]_c = 0$$

が成り立つ。

(iv)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A, B]_c = \left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}, B\right]_c + \left[A, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right]_c$$

(v)
$$\sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k} \right\} = \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial Q_k} \right\}$$

ただし (p, q) と (P, Q) とは正準変換で結ばれているとする。

この最後の関係は，$(p, q) \rightarrow (P, Q)$ なる変換が正準変換であるための必要十分条件である。

いま，正準変数と時間の関数を

$$F = F(p_1, p_2, \cdots, p_f, q_1, \cdots, q_f, t) \tag{9.4}$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k \right\} + \partial_t F \\ &= \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right\} + \partial_t F \end{aligned}$$

$$=[F, H]_c+\partial_t F \tag{9.5}$$

となる．ただしここで正準方程式を用いた．特にFとして q_i, p_i をとると，式 (9.5) は

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=[q_i, H]_c \tag{9.6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=[p_i, H]_c \tag{9.6b}$$

となる．これは正準方程式そのものである．

§10. Poisson 括弧と無限小正準変換

いま，無限小正準変換

$$q_i \longrightarrow Q_i=q_i+\delta q_i \tag{10.1a}$$

$$p_i \longrightarrow P_i=p_i+\delta p_i \tag{10.1b}$$

を考える．すると関数 (9.4) に対して

$$\begin{aligned}
F(P, Q, t)&=F(p+\delta p, q+\delta q, t)\\
&=F(p, q)+\sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k\right\}\\
&=F(p, q)+\epsilon\sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right\}\\
&=F(p, q)+\epsilon[F, G]_c
\end{aligned} \tag{10.2}$$

となる．ただし，無限小正準変換に対する式 (8.8) を用いた．式 (10.2) を書き直すと

$$\delta F(p, q, t)=\epsilon[F, G]_c \tag{10.3}$$

となる．特別の場合として

$$\delta q_i=\epsilon[q_i, G]_c \tag{10.4a}$$

$$\delta p_i=\epsilon[p_i, G]_c \tag{10.4b}$$

となるが，これは式 (8.8) にほかならない．

式 (10.3) のFとして，Hamiltonian をとると

$$\delta H=\epsilon[H, G]_c \tag{10.5}$$

次に式 (9.5) のFとしてGをとると，結局

$$\delta H=\epsilon[H, G]_c=-\epsilon\left\{\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}-\partial_t G\right\} \tag{10.6}$$

が得られる．したがって，**ある無限小変換に対して，Hamiltonianが不変ならば（つまり $\delta H=0$），変換の母関数 G は保存する**（ただしGが時間に陽に依存していない場合.）という重要な定理が得られる．§9の終わりの例から，Hamiltonianが(i)座標の推進に対して不変ならば，全運動量が保存し，(ii)座標の回転に対して不変ならば全角運動量が保存する．これが，Lagrange形式におけるNoetherの定理に対応する．

演習問題 I

1. 式 (1.8) を拡張し
$$\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_i}=\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{y}_j}\right)+\cdots$$
を導け．
2. $x_1, x_2, \cdots, x_N$ のある関数の時間微分のEuler-Lagrange微分は恒等的に0となることを確めよ．この逆を証明せよ．
3. 式 (3.7) の中の量 $mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$ が，z軸の回りの角運動量であることを確めよ．
4. Lagrangian (3.9) を重心座標と相対座標で書き，式 (3.14) を導け．
5. 式 (3.18) の計算を自らやってみること．
6. Noetherの恒等式 (4.4) を本文を見ずに導いてみよ．
7. 12頁の落体の方程式を与えるようなLagrangianを作り，それが空間推進に対して不変であるかを吟味せよ．
8. Lagrangian (4.1) を，重心座標と相対座標で表現してみよ．なにか不都合なことが起こるだろうか？
9. 式 (5.2) が $\dot{q}_j$ について解けるための条件を求めよ．

10. 17頁の 2 式を組み合わせ，荷電粒子には Lorentz 力が働くことを確認せよ．

11. 式 (6.6) に到達する計算を，本文を見ずに自ら試みよ．

12. 式 (7.2) から式 (7.5) を導け．

13. Poisson 括弧に対する Jacobi の恒等式を証明せよ．

14. A，B の Poisson 括弧が正準変換に対して不変なこと，およびその逆を確認せよ．

II. Fourier 級数と Fourier 変換

§1. は じ め に

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\} \tag{1.1}$$

の形の級数を**三角級数**という．ここで a_n と b_n とは，x に依存しない定数である．

この級数の歴史について少し述べると：三角級数がはじめて考察されたのは，D. Bernoulli による振動する弦の問題に関する分析においてである．Bernoulli は波動方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

の形式的な一般解が

$$\psi(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} \tag{1.3}$$

と書けることを主張した．ただし，弦の端は $(0, 0)$ と $(0, L)$ で固定されているとする．これに関して，数学者 d'Alembert と Euler の間で議論が戦わされた．

Fourier は彼の著書 "Théorie de la chaleur" の中で，数々の三角級数を考察し，多くの場合について，三角級数がある関数に収束することを示して

いる．そこでPoissonは，1823年に三角級数の収束の証明を試みた．さらに，Cauchyは，1826年と1827年に証明を発表したが，1つの証明はまちがっていたし，第2のほうの証明は，特別の関数に対してしか成立しなかった．1829年にいたってDirichletがはじめて厳密な証明を与えた．それによると，一般の関数についてFourier級数はある関数 $f(x)$ に収束する．

現代物理，特に，電磁気学，量子力学，場の量子論などでは，Fourier級数，およびFourier積分変換は欠くことのできない重要な技巧である．事実，これらは広く応用されており，現代技術の中でも，広く用いられている．

その実用性だけでなく，Fourier級数論は規格化直交関数系を扱う典型的な例であって，そこに含まれる概念はPauliスピン行列や，Diracのガンマ行列を扱うときにも応用される（付録A参照）．

ここで，Fourier級数と積分変換の議論を簡単にまとめておく．

§2．Fourier　級　数

領域

$$-\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2} \tag{2.1}$$

で定義された関数 $f(x)$ を考える．いま，積分

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.2a}$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2.2b}$$

が存在するなら，これらを**Fourier係数**とよぶ．これらを用いて作った級数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\} \tag{2.3}$$

を**Fourier級数**とよぶ．Dirichletによるとこの級数は，

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] \tag{2.4}$$

に収束する．記号は明らかと思うが，$f(x)$ が連続関数なら式(2.4)は $f(x)$

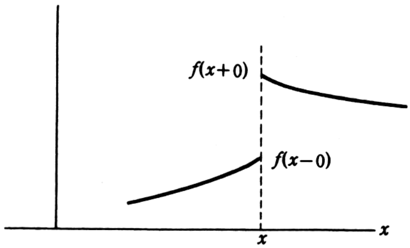


図 2.1

に等しく，もし，図2.1のような非連続関数ならば，点 x における左からの極限値と右からの極限値の平均値である．すなわち

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\} \tag{2.5}$$

もっとも，こう書くのはめんどうなので，式 (2.5) の意味で単に

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\} \tag{2.6}$$

と書くことが多い．式 (2.2) を式 (2.5) に代入すると

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}y\,f(y)\cos\left\{\frac{2\pi n}{L}(x-y)\right\} \tag{2.7}$$

となる．ただし

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

を用いた．

上では，(2.1) という領域を考えたが，これを $(0, T)$ にずらせてもよい．この場合の Fourier 級数は

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$$
$$=\frac{1}{2}a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right\} \qquad (2.8)$$

で，Fourier 係数は

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T ds\, f(s)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}s\right) \qquad (n=0, 1, 2, \cdots) \qquad (2.9a)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T ds\, f(s)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}s\right) \qquad (n=1, 2, \cdots) \qquad (2.9b)$$

である．

式（2.5）と式（2.8）によると，関数 $f(x)$ や $f(t)$ は，それぞれLとTを周期とした周期関数である．

式（2.8）の場合，Tの代わりに角振動数

$$\frac{2\pi}{T}\equiv\omega$$

を用いると

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\} \qquad (2.8')$$

と書くことができる．Fourier 係数は

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} ds\, f(s)\cos(n\omega s) \qquad (n=0, 1, 2, \cdots) \qquad (2.9'a)$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} ds\, f(s)\sin(n\omega s) \qquad (n=1, 2, \cdots) \qquad (2.9'b)$$

である．

［例　1］

もし $f(x)\equiv 0$ ならば，Fourier 係数の定義（2.2）や（2.9）から明らかなように，すべての Fourier 係数は 0 である．すなわち

$$a_n=0 \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$
$$b_n=0 \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

であり，この逆も成り立つ．これは全くあたりまえのことだが，Fourier 級数を用いて微分方程式を解く場合，これを忘れてまごつくことがあるから注意しよう．

［例 2］

もし

$$f(x)=\text{const} \qquad -\frac{L}{2}<x\leq\frac{L}{2}$$

ならば

$$a_0=2\,(\text{const})$$
$$a_n=b_n=0 \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

［例 3］

$$f(x)=x \qquad -\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2} \tag{2.10}$$

に対しては

$$a_n=0$$
$$b_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,x\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)=\frac{L}{\pi}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

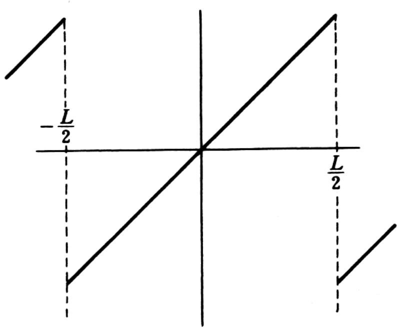


図 2.2

$$\therefore \quad x=\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

$$=\frac{L}{\pi}\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right)+\cdots\right\} \qquad \left(-\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2}\right) \tag{2.11}$$

となる．領域を $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ から $(-\pi, \pi)$ に変えると

$$\frac{1}{2}y=\left[\sin y-\frac{1}{2}\sin 2y+\frac{1}{3}\sin 3y+\cdots\right] \qquad (-\pi<y<\pi)$$

となる．

［例　4］　方形波（矩形波）

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\frac{L}{2} \\ 0 & x=0 \\ -1 & -\frac{L}{2}<x<0 \end{cases} \tag{2.12}$$

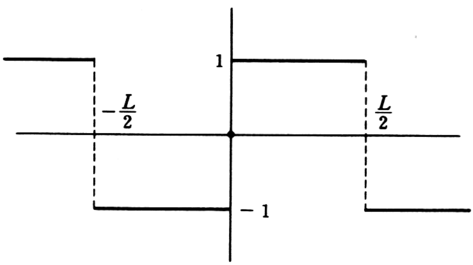


図 2.3

これは，奇関数だから，明らかに

$$a_n=0$$

そして

$$b_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dx\, f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)=\{1+(-1)^{n+1}\}\frac{2}{n\pi}$$

したがって

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\{1+(-1)^{n+1}\}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{6\pi}{L}x\right)+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{10\pi}{L}x\right)+\cdots\right\} \quad (2.13)$$

$$\left(-\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2}\right)$$

である．

［例 5］ 階段関数

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<x<a<T\\ \frac{1}{2} & x=a\\ 0 & a<x<T\end{cases}$$

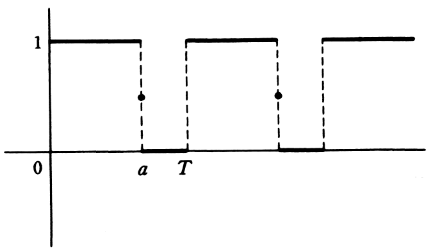


図 2.4

これは，奇関数でも偶関数でもないから，a_n，b_n をいちいち計算しなければならない．

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)=\frac{2}{T}\int_0^a \mathrm{d}t\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)=\frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}a\right)$$

同様に

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^a \mathrm{d}t\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)=\frac{1}{\pi n}\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi n}{T}a\right)\right\}$$

したがって

$$f(t)=\frac{a}{T}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{T}a\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right.$$

$$\left.+\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi n}{T}a\right)\right\}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]$$

$$=\frac{a}{T}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+\sin\left\{\frac{2\pi n}{T}(a-t)\right\}\right]$$

$$=\frac{a}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi na}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t-\frac{\pi na}{T}\right) \qquad (2.14)$$

［例　6］　ピラミッド形の関数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{L}{2}+x & -\dfrac{L}{2}<x<0\\[2mm] \dfrac{L}{2}-x & 0<x<\dfrac{L}{2}\end{cases}$$

は，偶関数だから

$$b_n=0$$

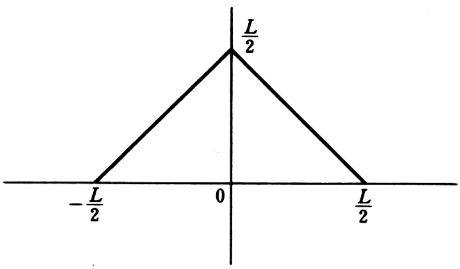


図 2.5

そして

$$a_0=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,f(x)=\frac{L}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)=\frac{L}{\pi^2 n^2}\{1-(-1)^n\} \qquad (n\neq 0)$$

よって

$$f(x)=\frac{L}{4}+\frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\{1-(-1)^n\}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

$$=\frac{L}{4}+\frac{2L}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1^2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)+\cdots\right\} \tag{2.15}$$

［例　7］　のこぎりの歯形関数

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2a}{T}t & 0<t<\dfrac{T}{2}\\[2ex] \dfrac{2a}{T}t-a & \dfrac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

では，計算はとばすが，

$$f(t)=\frac{a}{2}-\frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi n}{T}t \tag{2.16}$$

である．

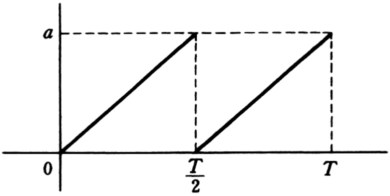


図 2.6

［例　8］　三角波

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{4A}{T}t+A & 0<t<\dfrac{T}{2}\\[2ex] \dfrac{4A}{T}t-3A & \dfrac{T}{2}<t<T\end{cases} \tag{2.17}$$

この場合，今までの例のように，Fourier 係数をいちいち計算するよりも例 4 を積分して求めたほうが簡単である．結果は

$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left\{\cos\omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\right\} \tag{2.18}$$

上のいろいろな例でみられるように，高調波の振幅は，一般にはだんだん

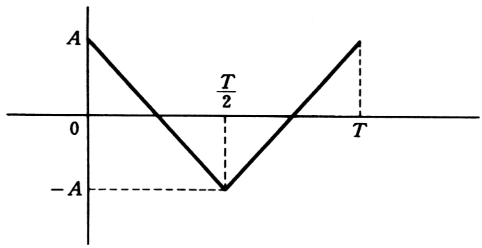


図 2.7

と小さくなる。

［例　9］

図2.8のような4端子回路を考えよう。これにKirchhoffの法則をあてはめ，はじめの電圧 ε_i と終わりの電圧 ε_f の比を求めると

$$\varepsilon_f=\frac{\dfrac{1}{in\omega C}}{R+\dfrac{1}{in\omega C}}\varepsilon_i=\frac{1}{1+in\omega RC}\varepsilon_i$$

となる。ただし，ここでは n 番目の高調波のみ取り出した。そこで，たとえば ε_i として方形波を考えると，ε_f としてはどのような波が出てくるであろうか？　一般にはむずかしいから

$$\omega \gg \omega_0 \equiv \frac{1}{RC}$$

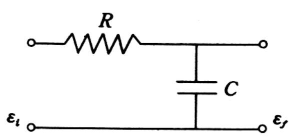


図 2.8

の領域を考えると

$$\varepsilon_f=-i\frac{\omega_0}{n\omega}\varepsilon_i$$

となる．方形波の高調波の振幅は式（2.13）により

$$\frac{4}{n\pi} \qquad (n=1, 3, 5, \cdots)$$

だから

$$\varepsilon_f=-i\frac{\omega_0}{n\omega}\frac{4}{n\pi}=-i\frac{\omega_0\pi}{2\omega}\frac{8}{\pi^2 n^2}$$

となる．これはまさに，三角波の高調波の式（2.18）である．すなわち，方形波の入射電圧は三角波になって出てくる．$-i$ は，出てくる電圧が入射電圧に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れることを示している．

もう1つの極限

$$\omega \ll \omega_0$$

の場合には，出てくる電圧の形は，入ってくるものと同じだが，時間

$$\tau=\frac{1}{\omega_0}=RC$$

だけ遅れる．

§3. 指数形の Fourier 級数

今までの Fourier 級数は，sine と cosine に関する展開だが，sine と cosine は指数関数の組み合わせで書くことができるから，Fourier 級数を指数関数の級数で与えることができる．事実，そのほうが便利なことも多い．

$$\cos k_n x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ik_nx}+\mathrm{e}^{-ik_nx}) \tag{3.1a}$$

$$\sin k_n x=\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ik_nx}-\mathrm{e}^{-ik_nx}) \tag{3.1b}$$

$$k_n\equiv\frac{2\pi}{L}n \tag{3.2}$$

を式（2.5）に代入して，整理すると

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\mathrm{e}^{ik_nx}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\mathrm{e}^{-ik_nx}\right\}$$

となる．これは

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n=0,\pm1,\cdots}f_n e^{ik_n x} \tag{3.3}$$

と書くことができる．ただし

$$f_n=\frac{\sqrt{L}}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,f(x)e^{-ik_n x} \tag{3.4a}$$

$$f_{-n}=\frac{\sqrt{L}}{2}(a_n+ib_n)=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,f(x)e^{ik_n x} \tag{3.4b}$$

である．$\sqrt{L}$ を取り出したのは便宜にすぎない．$f(x)$ か実関数ならば定義 (3.4) から

$$f_{-n}=f_n{}^*$$

である．逆にこれは，$f(x)$ が実関数である条件である．この f_n を決める積分 (3.4a) は，式 (2.2) や式 (2.9) に比べ，容易なことが多い．

[例 10] 波動方程式

ここで，はじめの波動方程式(1.2)に戻ろう．そして，この波動関数 $\psi(x, t)$ が調和振動子の集まりとして書くことができることを証明しよう．そのために，波動関数 $\psi(x, t)$ を x に関して指数形の Fourier 級数に展開する：

$$\psi(x, t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_n q_n(t)e^{ik_n x} \tag{3.5}$$

ただし，$\psi(x, t)$ は実だから

$$q_n(t)=q_{-n}{}^*(t) \tag{3.6}$$

である．式 (3.5) を波動方程式 (1.2) に代入すると

$$\sum_n\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q_n(t)+c^2k_n{}^2q_n(t)\right]e^{ik_n x}=0 \tag{3.7}$$

§2の［例1］の議論により，式 (3.7) は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q_n(t)+c^2k_n{}^2q_n(t)=0 \tag{3.8}$$

を意味する．これは，角振動数

$$\omega_n=c|k_n| \tag{3.9}$$

の調和振動子の式にほかならない．n の数は無限大だから，波動方程式を満たす $\psi(x, t)$ は，無限個の調和振動子の線形結合 (3.5) である．

このことを用いると，波動現象を取り扱うのに，力学的変数を用いて Lagrangian や Hamiltonian を作ったりすることができる．たとえば，この系の Hamiltonian は

$$H=\frac{1}{2}\sum_n\{p_n{}^*(t)p_n(t)+\omega_n{}^2q_n{}^*(t)q_n(t)\} \tag{3.10}$$

である．ただし，$p_n(t)$ は $q_n(t)$ の共役運動量で，正準方程式により，$\dot{q}_n(t)$ と関係づけられる．また，Hamiltonian (3.10) を量子力学的なものとみなし，交換関係

$$[p_n(t), q_m(t)]=-i\hbar\delta_{nm} \tag{3.11}$$

を仮定すると，よく知られているように，式 (3.10) の固有値は

$$E\{N_1, N_2, \cdots)=\sum_n\hbar\omega_n\left(N_n+\frac{1}{2}\right) \tag{3.12}$$

$$N_n=0, 1, 2, \cdots \quad (\text{各 } n \text{ について}) \tag{3.13}$$

である．この固有値 (3.12) は，エネルギーの単位 $\hbar\omega_n$ の正整数倍になっている．したがって，この系はエネルギー量子 $\hbar\omega_n$ からできあがっていることになる．この点は，最後の章で議論しよう．この Hamiltonian (3.10) に統計力学をあてはめると，うまいぐあいに Planck の分布が得られる．これも最後の章で議論するが，ここでは，Fourier 級数により，場の問題を力学の問題として取り扱うことができるようになったという点をみのがさないように．

§4. 多変数関数の Fourier 級数

指数形の Fourier 級数は，多変数関数を Fourier 展開するとき，特に便利である．3個の変数 x_1, x_2, x_3 に依存する関数を簡単に $f(\boldsymbol{x})$ と書く．この関数が，領域

$$-\frac{L_i}{2}<x_i<\frac{L_i}{2} \qquad (i=1, 2, 3) \tag{4.1}$$

で定義されているとしよう．いま

$$k_i \equiv \frac{2\pi}{L_i} n_i \qquad (i=1, 2, 3) \tag{4.2}$$

$$n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.3}$$

を導入し

$$\frac{2\pi}{L_1} n_1 x_1 + \frac{2\pi}{L_2} n_2 x_2 + \frac{2\pi}{L_3} n_3 x_3 \equiv \boldsymbol{kx}$$

とおく．そこで $f(\boldsymbol{x})$ の Fourier 係数を

$$f_{\boldsymbol{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V \mathrm{d}^3x \, f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{kx}} \tag{4.4}$$

$$V \equiv L_1 L_2 L_3$$

と書くと，Fourier 級数は

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} f_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}} \tag{4.5}$$

となる．１変数の場合と同様に，$f(\boldsymbol{x})$ が実関数ならば

$$f_{\boldsymbol{k}} = f_{-\boldsymbol{k}}{}^* \tag{4.6}$$

である．同じく $\sqrt{V}$ は便宜にすぎない．

例はあとで挙げる．

§5．完全規格化直交関数系とデルタ関数

Fourier 級数は完全規格化直交関数系による，一般関数の展開の典型的な例である．いま，規格化直交関数を

$$\phi_n(x) \qquad a < x < b \tag{5.1}$$

とする．**規格化直交**とは

$$\int_a^b \mathrm{d}x \, \phi_n{}^*(x) \, \phi_m(x) = \delta_{nm} \tag{5.2}$$

が成り立つということである．

１変数の Fourier 級数の場合には

$$\phi_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{ik_n x} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.1$'$}$$

とすると，規格化直交条件

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x\ \phi_n^*(x)\,\phi_m(x) = \delta_{nm} \tag{5.2'}$$

が成り立つことがすぐわかる．

任意の関数 $f(x)$ が，ある規格化直交系で，

$$f(x) = \sum_n \phi_n(x)\, f_n \tag{5.3}$$

と展開できたとしよう．展開係数 f_n を決めるためには，式 (5.3) に $\phi_m^*(x)$ をかけて，x につき a から b まで積分するとよい．式 (5.2) によって

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x\ \phi_m^*(x)\, f(x) &= \sum_n \int_a^b \mathrm{d}x\ \phi_m^*(x)\,\phi_n(x)\, f_n \\ &= \sum_n \delta_{mn}\, f_n = f_m \end{aligned} \tag{5.4}$$

となり，f_m （mは任意）が決まる．

ここでは，もちろん式 (5.3) という展開が可能であることを仮定した．展開は可能ではないかもしれない．もし

$$S_N(x) \equiv \sum_{|n|<N} \phi_n(x)\, f_n \tag{5.5}$$

が，Nを ∞までもっていったとき，$f(x)$ に限りなく近づくならば（厳密には $\dfrac{1}{2}\Big(f(x+0)+f(x-0)\Big)$ に近づくならば)，$f(x)$ は $\phi_n(x)$ で**展開可能**という．展開可能なら式 (5.3) が成り立ち，そのとき $\phi_n(x)$ は**完全である**とか**完全系をなす**という．そこで，式 (5.4) を式 (5.3) に代入すると

$$f(x) = \sum_n \int_a^b \mathrm{d}y\ \phi_n(x)\,\phi_n^*(y)\, f(y) \tag{5.6}$$

という恒等式が得られる．式 (5.6) で，和と積分が交換できるとしよう．そして

$$\sum_n \phi_n(x)\,\phi_n^*(y) = \delta(x-y) \tag{5.7}$$

とおくと，式 (5.6) は，任意の関数 $f(x)$ （といっても，積分が収束するようなものに話を限って）に対して

$$\int_a^b \mathrm{d}y\,\delta(x-y)f(y)=f(x) \qquad (a<x<b) \tag{5.8}$$

が成り立たなければならない．任意の関数について式 (5.8) が成り立つような $\delta(x-y)$ を Dirac の**デルタ関数**とよぶ．式 (5.8) をデルタ関数の定義とする．ただし $f(y)$ は x でよく定義された値をもつと仮定しなければならない．

式 (5.7) を**完全性**の条件とよぶ．デルタ関数については，次の章で詳しく考えるが，物理数学において，たいへん便利なものである．Fourier 級数(5.1)の場合には

$$\delta(x-y)=\frac{1}{L}\sum_n \mathrm{e}^{ik_n(x-y)} \tag{5.9}$$

また，3変数の場合には

$$\prod_{i=1}^{3}\delta(x_i-y_i)\equiv\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{5.10}$$

で，任意の関数 $f(\boldsymbol{x})$ につき

$$\int_V \mathrm{d}^3y\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}) \tag{5.11}$$

が成り立つ．($\boldsymbol{x}$ は V の中にあるとする．)

式 (5.1) の指数関係以外に，いろいろと便利な完全規格化直交関数系のうちの2，3を挙げておく．

(i) Laguerre の多項式

$$L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}) \qquad (0<x<\infty) \tag{5.12}$$

より

$$\phi_n(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}L_n(x) \tag{5.13}$$

を作ると，これが完全規格化直交関数系を作る．

(ii) Legendre の多項式

$$P_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \qquad (-1\leq x\leq 1) \tag{5.14}$$

から

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x) \tag{5.15}$$

によって，完全規格化直交関数系を作ることができる．

(iii) Tschebyscheff の多項式

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \qquad (|x|<1) \tag{5.16}$$

は，完全規格化直交関数系

$$\phi_n(x)=\frac{2^n}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{1-x^2}}T_n(x) \tag{5.17}$$

を与える．

(iv) Hermit の多項式

$$H_n(x)=(-1)^n 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{5.18}$$

から

$$\phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) \tag{5.19}$$

によって完全規格化直交関数系を作ることができる．このほか，まだまだ多くの完全規格化直交関数系が存在するが，それらについては，“応用数学”の教科書を参照されたい．上に挙げた関数系は，量子力学の固有値問題を解くとき出てくるから，量子力学の教科書を参照されてもよい．

§6．Fourier 積分変換

今まで，有限の領域 $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ や $(0, T)$ で定義されている関数を考えてきた．Fourier 級数でこれらを表現すると，$\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ や $(0, T)$ を周期とする周期関数が得られる．では，いったい，周期をもたない関数は Fourier 展開できないのかというと，そうではなく，周期をもたない関数に議論を拡張しようと思ったら，$\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ の L を無限大までのばしてやるとよい．そうす

ると，式（3.2）により，k_n とk_{n+1} との間隔はだんだんと短くなり，結局，k を連続変数として取り扱うことができるようになる．そして，n に関する和は，k に関する積分になる．その $L\to\infty$ の極限では，

$$\sqrt{L}\,f_n \longrightarrow \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k)$$

$$\frac{1}{L}\sum_n \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k \qquad (6.1)$$

式（3.3）は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\hat{f}(k)\mathrm{e}^{ikx} \qquad (6.2)$$

係数 $\hat{f}(k)$ を決める式は

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\mathrm{e}^{-ikx} \qquad (6.3)$$

となる．

同様にして，3変数の場合は

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\hat{f}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}} \qquad (6.4)$$

$$\hat{f}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{kx}} \qquad (6.5)$$

となる．これらの $\hat{f}(k)$ や $\hat{f}(\boldsymbol{k})$ をそれぞれ $f(x)$ や $f(\boldsymbol{x})$ の **Fourier 変換**とよぶ．Fourier 変換が意味をもつためには，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|f(x)|<\infty \qquad (6.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,|f(\boldsymbol{x})|<\infty \qquad (6.7)$$

でなければならない．

［例 11］

上の処方式（6.1）により，デルタ関数は

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{ik(x-y)} \qquad (6.8)$$

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{6.9}$$

である。

[例 12]

$$f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|} \qquad (a<0) \tag{6.10}$$

このFourier変換は

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-ikx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-(a+ik)x}+\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-(a-ik)x}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2} \tag{6.11}$$

したがって

$$\mathrm{e}^{-a|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}\mathrm{e}^{ikx} \tag{6.12a}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{a}{k^2+a^2}\cos kx \tag{6.12b}$$

このFourier表示を x で微分して a で割ると

$$\mathrm{e}^{-a|x|}\epsilon(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{k^2+a^2}\sin kx \tag{6.12c}$$

が得られる．ただし，ここに，$\epsilon(x)$ とは

$$\epsilon(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \tag{6.13}$$

で，そのFourier表示は，$a\to 0$ とおいて得られる．すなわち

$$\epsilon(x)=-\frac{i}{\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{k^2+\epsilon^2}\mathrm{e}^{ikx} \tag{6.13a}$$

$$=\frac{i}{\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{k^2+\epsilon^2}\mathrm{e}^{-ikx} \tag{6.13b}$$

[例 13]

階段関数

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{6.14}$$

については，Fourier 表示

$$\theta(x)=-\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{1}{k-i\epsilon}\mathrm{e}^{ikx} \tag{6.15a}$$

$$=\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{1}{k+i\epsilon}\mathrm{e}^{-ikx} \tag{6.15b}$$

が成り立つ．これを x で微分すると，デルタ関数の表示式（6.8）が得られる．式（6.15）を一般化すると

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\theta(t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{1}{\omega+i\alpha}\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{6.15c}$$

$$(\alpha>0)$$

が得られる．

［例 14］

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}k^2}\mathrm{e}^{ikx} \tag{6.16}$$

であり，Gauss の関数の Fourier 変換はやはり Gauss の関数である．

［例 15］

2，3 の 3 次元の Fourier 変換を挙げておく．

$$\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r}=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2}\mathrm{e}^{ikx}\qquad(\kappa>0) \tag{6.17}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm ilr}}{r}=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\frac{1}{\boldsymbol{k}^2-l^2\mp i\epsilon}\mathrm{e}^{ikx}\qquad(l>0) \tag{6.18}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r^2}=\frac{2}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\frac{1}{k}\left[\tan^{-1}\frac{\kappa}{k}-\frac{\pi}{2}\right]\mathrm{e}^{ikx}\qquad(\kappa>0) \tag{6.19}$$

ここで，積分は全部 $-\infty$ から ∞ まで行う．また $r\equiv|\boldsymbol{x}|$ である．

［例 16］　分散関係（Dispersion relation）

物理学においては，原因が結果に先行することはないので，$t<0$ では恒等的に 0 となる，いわゆる**因果関数**

$$f(t)\equiv 0 \qquad t<0 \tag{6.20}$$

が重要である．式（6.20）をもう少し取り扱いやすくするには，階段関数（6.14）を用いて

$$f(t)=\theta(t)f(t) \tag{6.21}$$

と書くとよい．いま，

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{6.22}$$

と Fourier 変換し，式（6.21）と式（6.15b）を用いると

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\\&=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{1}{\omega'+i\epsilon}\mathrm{e}^{-i\omega' t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega''\,\hat{f}(\omega'')\mathrm{e}^{-i\omega'' t}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{1}{\omega-\omega'+i\epsilon}\hat{f}(\omega')\right]\mathrm{e}^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{6.23}$$

したがって

$$\hat{f}(\omega)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{1}{\omega-\omega'+i\epsilon}\hat{f}(\omega') \tag{6.24}$$

という関係が得られる．すなわち，式（6.20）の性質をもった因果関数の Fourier 変換は式(6.24)を満たしていなければならない．次の章で導くように

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\hat{f}(\omega')}{\omega-\omega'+i\epsilon}=P\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\hat{f}(\omega')}{\omega-\omega'}-i\pi\hat{f}(\omega) \tag{6.25}$$

が成り立つ．ただし P とは Cauchy の主値である．この式(6.25)と式(6.24)とを組み合わせると，$\hat{f}(\omega)$ の実部と虚部について

$$\mathrm{Re}\,\hat{f}(\omega)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{Im}\,\hat{f}(\omega')}{\omega-\omega'} \tag{6.26a}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{Re}\,\hat{f}(\omega')}{\omega-\omega'} \tag{6.26b}$$

が成り立つ．因果関数に対して成立する関係（6.26）を**分散関係式**という．(Kramers-Krönig の分散関係式)

［例 17］

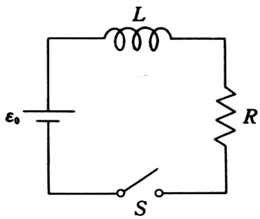


図 2.9

図 2.9のような回路のスイッチSを入れたとき，どのような電流が流れるか？ 微分方程式は

$$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}+RI(t)=\varepsilon_0\theta(t) \tag{6.27}$$

である．これを Fourier 積分を使って解いてみよう．電流 $I(t)$ の Fourier 変換を $\hat{I}(\omega)$ とし，右辺の $\theta(t)$ に式（6.15b）を用いると式（6.27）は代数方程式

$$-i\omega L\hat{I}(\omega)+R\hat{I}(\omega)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon_0}{\omega+i\varepsilon} \tag{6.28}$$

になってしまうので，直ちに

$$\begin{aligned}\hat{I}(\omega)&=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{R-i\omega L}\frac{\varepsilon_0}{\omega+i\varepsilon}\\&=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon_0}{L}\frac{1}{\frac{R}{L}-\varepsilon}\left[\frac{1}{\omega+i\varepsilon}-\frac{1}{\omega+i\frac{R}{L}}\right]\end{aligned} \tag{6.29}$$

が得られる．これを Fourier 逆変換すれば

$$I(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\hat{I}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}=\frac{\varepsilon_0}{R}\left[\theta(t)-\mathrm{e}^{-tR/L}\theta(t)\right]$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{R}(1-\mathrm{e}^{-tR/L}) \qquad t>0 \tag{6.30}$$

となる．ただし，式（6.15b）と（6.15c）を用いた．この電流はもちろん因果関数である．微分方程式（6.27）はIV章で議論する Green 関数法を用いると，もっと直接に積分できる．それまでのおたのしみ．

注 意

(1) 時間変数についての Fourier 変換には e^{-ik_0t} を用い，空間変数についての Fourier 変換には e^{ikx} を用いるのが普通である．したがって，空間時間の関数については

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k_0\,\hat{\psi}(\boldsymbol{k},k_0)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}-ik_0t}$$

となる．この指数の肩は，相対論的理論において特に便利である．

(2) Fourier 変換に対する次の関係は重要である．いま

$$f(x)=\sum_n \hat{f}_n\phi_n(x)$$

$$g(x)=\sum_n \hat{g}_n\phi_n(x)$$

としよう．ここに $\phi_n(x)$ は完全規格化直交関数系で，式（5.2）の条件を満たしているとすると

$$\int_a^b \mathrm{d}x\,f(x)g^*(x)=\sum_n \hat{f}_n\,\hat{g}_n^* \tag{6.31}$$

が成り立つ．これを **Pearseval の関係**とよぶ．

(3) 電場や磁場のようなベクトル場も Fourier 変換することができる．それには，まず

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \boldsymbol{b}_k\mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}} \tag{6.32}$$

と変換する．$\boldsymbol{b}_k$ は，左辺と同じくベクトルである．そこで，3個の互いに直交するベクトル $\boldsymbol{e}_k^{(1)}$，$\boldsymbol{e}_k^{(2)}$ と $\boldsymbol{e}_k^{(3)}$ を導入し，特に

$$\boldsymbol{e}_k^{(3)}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}| \tag{6.33}$$

とする．すると，$\boldsymbol{e}_k^{(1)}$ と $\boldsymbol{e}_k^{(2)}$ とは，ベクトル $\boldsymbol{k}$ に直交している．これら3

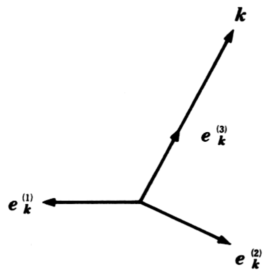


図 2.10

個のベクトルを用いて

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{k}}=\sum_{r=1}^{3}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}b_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{6.34}$$

と展開し，これを式（6.32）に代入すると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{r=1}^{3}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}}b_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{6.35}$$

となる．これがベクトル関数の展開である．いま

$$\boldsymbol{B}_{L}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}}b_{\boldsymbol{k}}^{(3)} \tag{6.36a}$$

$$\boldsymbol{B}_{T}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}}b_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{6.36b}$$

を定義すると，これらはそれぞれ，式（6.33）により

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_{L}(\boldsymbol{x})=0 \tag{6.37a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_{T}(\boldsymbol{x})=0 \tag{6.37b}$$

を満たす．

これら 3 個のベクトルに対しては

$$(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(s)})=\delta_{rs} \tag{6.38a}$$

$$\sum_{r=1}^{3}e_{\boldsymbol{k}i}^{(r)}e_{\boldsymbol{k}j}^{(r)}=\sum_{r=1,2}e_{\boldsymbol{k}i}^{(r)}e_{\boldsymbol{k}j}^{(r)}+\frac{1}{k^{2}}k_{i}k_{j}=\delta_{ij} \tag{6.38b}$$

が成り立つ．式 (6.38a) のほうは，3 個のベクトルに対する規格化直交条件

であり，式 (6.38b) のほうは，3個のベクトルの完全性条件である．これは

$$\sum_{r=1,2} e_{ki}^{(r)} e_{kj}^{(r)} = \delta_{ij} - \frac{1}{k^2} k_i k_j \tag{6.38c}$$

とも書くことができる．

§7．固有ベクトルおよび固有値

ここで固有ベクトル（または固有関数）および固有値について少々復習しておく．量子力学に使う記号に慣れるよい機会である．

完全規格化直交関数系 $\phi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ を考えよう．この関数系は領域 (a, b) で定義されているとする．完全性とは，同じ領域で定義された任意の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_n \phi_n(x) f_n \tag{7.1}$$

と展開できるという意味であり，展開係数 f_n は式（5.3）で与えられる．

完全規格化直交関数系 $\phi_n(x)$ で張られる空間を**関数空間**という．この空間の中の関数 $f(x)$ を，この空間に属するベクトルとよぶ．上の展開式（7.1）を**基底 $\boldsymbol{\phi}_n(\boldsymbol{x})$ による展開**とよぶ．（3次元空間のベクトルを基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ で展開する式　$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_1 V_1 + \boldsymbol{e}_2 V_2 + \boldsymbol{e}_3 V_3$　を頭においておくとよい．）

さて，この関数空間における演算子を A としよう．（A は，x に関する微分演算子から成り立っている．）もし，この A をある0でない関数 $f(x)$ に演算したとき，これが $f(x)$ 自身に数をかけたものとなったとする．このときの関数を $f_a(x)$，これにかかる数を a としたとき

$$A f_a(x) = a f_a(x) \tag{7.2}$$

になったとする．このとき，$f_a(x)$ を演算子 A の**固有ベクトル**（または**固有関数**），a を A の**固有値**とよぶ．例はあとで挙げる．

2個のベクトル $f(x)$ と $g(x)$ について

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f^*(x) A g(x) = \left[\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x) A f(x) \right]^*$$

が成り立つとき，演算子 A は**エルミート**であるという．エルミート演算子に

は，固有関数が存在し，固有値は実数である．エルミートでない演算子には，固有ベクトルがあるという保証はない．

2個のベクトル $f(x)$ と $g(x)$ について，**内積**（スカラー積）を

$$\int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x)$$

で定義する．これを

$$\int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x) \equiv \langle f | g \rangle$$

と表現することもある．もちろん

$$\langle f | g \rangle \equiv [\langle g | f \rangle]^*$$

である．内積の性質を挙げておくと：

a）任意の複素数 λ について

$$\langle f | \lambda g \rangle = \lambda \langle f | g \rangle$$

b）

$$\langle f | g+h \rangle = \langle f | g \rangle + \langle f | h \rangle$$

c）Schwarz の不等式

$$\langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \quad \geq \quad |\langle f | g \rangle|^2$$

$\sqrt{\langle f | f \rangle}$ を**ノルム**という．

$$\| \, | f \rangle \| \equiv \sqrt{\langle f | f \rangle}$$

と表す．また，2個のベクトル $f(x)$ と $g(x)$ は

$$\langle f | g \rangle = 0$$

のとき，互いに**直交する**という．

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$$

のとき，$\phi_n(x)$ は規格化直交関数系である．もし，この系が

$$\sum_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | = 1 \qquad \left(\sum_n \phi_n(x)\, \phi_n^*(x') = \delta(x-x')\right)$$

を満たすとき，任意のベクトル $f(x)$ は

$$| f \rangle = \sum_n | \phi_n \rangle f_n$$

と書くことができ

$$f_n = \langle \phi_n | f \rangle$$

である．f_n のことを，ベクトル $|f\rangle$ の**成分**とよぶことがある．

[例 18]

演算子

$$\boldsymbol{p} \equiv \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{7.3}$$

の固有ベクトルは

$$\phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \quad (\text{すべての実数の } \boldsymbol{k} \text{ について}) \tag{7.4}$$

である．すなわち

$$\boldsymbol{p}\phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \hbar\boldsymbol{k}\phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \tag{7.5}$$

だから，固有値は　$\hbar\boldsymbol{k}$ である．固有ベクトルに $1/\sqrt{V}$ がつくのは，規格化条件を満たすためで，事実

$$\langle \phi_{\boldsymbol{k}} | \phi_{\boldsymbol{k}'} \rangle = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\phi_{\boldsymbol{k}}^*(\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

という，完全規格化直交条件が満たされている．

[例 19]

次に演算子

$$H_0 \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{7.6}$$

を考えよう．固有ベクトルは同じく式（7.4）で

$$H_0\phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\hbar\boldsymbol{k})^2}{2m}\phi_{\boldsymbol{k}}(x) \tag{7.7}$$

すなわち，固有値は

$$\frac{(\hbar\boldsymbol{k})^2}{2m} \tag{7.8}$$

である．

注 意

これらの演算子 $\boldsymbol{p}$ と H_0 とは，それぞれ量子力学的粒子の運動量，エネル

ギーの演算子である．いうまでもなく，$\hbar$は量子力学に出てくる基本定数，mは粒子の質量である．

上には，微分演算子のみを考えたが，それは必要なことではなく，

$$H_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \omega^2 x^2\right)$$

のようなものを考えてもよい．たとえば

$$\phi_0(x) = N\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$$

とすると，簡単な計算ののち

$$H_0\,\phi_0(x) = \frac{\omega}{2}\phi_0(x)$$

が成り立つことがわかる．この場合，$\phi_0(x)$ は固有ベクトル，その固有値は $\omega/2$ である．式（5.19）を用いると，このほかの固有ベクトルも得られる．Nは規格化条件によって決める．

同じ考え方は，行列にもあてはまる．

［例 20］

IV章の式（4.12）のうちの１つ

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

を考える．これは，３個の固有ベクトル

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

をもち，それぞれの固有値は，1，−1，0 である．すなわち

$$T_3|1\rangle = |1\rangle,\quad T_3|-1\rangle = -|-1\rangle,\quad T_3|0\rangle = 0$$

が成り立つ．式（7.10）は規格化されており，互いに直交している．たとえば

$$\langle 1|1\rangle=\frac{1}{2}[1 \quad -i \quad 0]\begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix}=1$$

$$\langle 1|-1\rangle=\frac{1}{2}[1 \quad -i \quad 0]\begin{bmatrix}1\\ -i\\ 0\end{bmatrix}=0$$

である．($\langle 1|$ とは $|1\rangle$ のエルミート共役である．)

式 (7.10) の3個のベクトルは完全系を張る．すなわち

$$|1\rangle\langle 1|+|-1\rangle\langle -1|+|0\rangle\langle 0|$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & i & 0\\ -i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

[例 21]

Pauli スピン行列の1つ

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

について考えてみると，規格化直交固有ベクトルは

$$|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad |-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

である．容易にわかるように

$$\sigma_1|1\rangle=|1\rangle \qquad \sigma_1|-1\rangle=-1|-1\rangle$$

が成り立つ．すなわち，固有値は±1 である．規格化直交条件および完全性の条件を試すのも容易で

$$\langle 1|1\rangle=1, \qquad \langle -1|-1\rangle=1, \qquad \langle 1|-1\rangle=0$$

$$|1\rangle\langle 1|+|-1\rangle\langle -1|=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

である．

これらの例で用いた記号は，量子力学でしばしば用いられるものである．いうまでもなく，量子力学では，物理的量（たとえば運動量とか角運動量と

か)は，すべてHilbert空間における演算子である．Hilbert空間の一般のベクトルを $|\ \rangle$ で表し，これが物理的状態を表す．物理量に対応する演算子を A とすると，その固有ベクトル $|a\rangle$ は

$$A|a\rangle=a|a\rangle \tag{7.11}$$

を満たす．a が固有値で，状態 $|a\rangle$ で物理量 A を観測した場合，観測値 a が得られる．一般のベクトルは，$|a\rangle$ で展開できて

$$|\ \rangle=\sum_a |a\rangle\langle a|\ \rangle$$

である．

ここで，1つの重要な定理を述べておく．

2つのエルミート演算子 A，B が交換するならば，つまり

$$[A, B]=0 \tag{7.12}$$

ならば，A と B は共通の固有ベクトルをもつ．証明は次のように行う．

まず A の固有ベクトルが求まったとして

$$A|a\rangle=a|a\rangle \tag{7.13}$$

としよう．式 (7.12) のために

$$AB|a\rangle=BA|a\rangle=aB|a\rangle \tag{7.14}$$

これは $B|a\rangle$ が，演算子 A の固有ベクトルであることを示している．そしてその固有値は a である．そこで，いま固有値問題 (7.13) で，固有値 a をもった固有ベクトルが1個しかないとする（これを縮退していない場合という）と，$B|a\rangle$ は $|a\rangle$ に比例していなければならず，その比例係数を b とすると

$$B|a\rangle=b|a\rangle \tag{7.15}$$

つまり，$|a\rangle$ は，固有値 b をもつ演算子 B の固有ベクトルである，ということになる．

次に，縮退している場合を考える．この場合には，式 (7.13) の代わりに

$$A|a, \alpha\rangle=a|a, \alpha\rangle \tag{7.16}$$

と書いておくべきである．固有値 a をもつ固有ベクトルは，たった1個では

なく，いろいろとありうるという意味で，その“いろいろ”を α で区別するということである．すると式（7.14）から $B|a, \alpha\rangle$ は，$|a, B\rangle$ のある線形結合でなければならない．それをBの固有ベクトルにするためには，$|a, \alpha\rangle$ のある線形結合をとる．するとその線形結合がBの固有ベクトルとなる．ここで，エルミートな演算子の性質を証明なしに並べておく．

(1) エルミート演算子の固有値はすべて実である．

(2) あるエルミート演算子の相異なった固有値に属する固有ベクトルは，互いに直交する．すなわち

$A|a\rangle = a|a\rangle$，$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ で $a \neq a'$ ならば $\langle a'|a\rangle = 0$ である．

(3) 上のいろいろな例では，1つのエルミート演算子のすべての固有ベクトルは完全系をなしていることをみたが，これは通常仮定することである．量子力学では，エルミート演算子でその固有ベクトルが完全系をなすようなものを，“オブザーバブル”とよぶ．この言葉を用いると，上の例の $\boldsymbol{p}$ や H_0 は，オブザーバブルである．そして，Fourier 級数とは，$\boldsymbol{p}$ の固有ベクトルによる展開であるということができる．

(4) ある演算子の固有値を決めることを，Aを“対角化”するという．

演習問題 II

1．正準方程式を用い，Hamiltonian（3.10）から，$p_n(t)$ を $\dot{q}_n(t)$ で表し，次に，Fourier 級数（3.5）を逆に解いて，$q_n(t)$ や $p_n(t)$ を波動関数（とその時間微分）で表す．さらに，それらを用いて，Hamiltonian (3.10) を波動関数 $\psi(x, t)$ の時間および空間微分で表してみよ．

2．式（6.13）の階段関数を

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\epsilon x} & x > 0 \\ -e^{\epsilon x} & x < 0 \end{cases} \qquad (\epsilon > 0)$$

として Fourier 積分表示を求め，式（6.13）と比較してみよ．

3. 式（6.16）を導け．

4. 式（6.17），式（6.18），式（6.19）を導け．

5. 関数（6.30）の Fourier 積分（6.29）は分散関係式（6.26）を満たしているか？

6. 磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ を空間変数について Fourier 積分で表してみよ．

III. デルタ関数とその応用

§1. はじめに

まずはじめに Dirac がデルタ関数を導入したときの文章を引用させてもらう．

「…このような無限大を取り扱うための正確な記号を作ろう．そのために，パラメーター x に依存する次のような性質をもつ関数 $\delta(x)$ を導入しよう．つまり，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$\delta(x)=0 \qquad x\neq 0$$

このような関数 $\delta(x)$ を頭にえがくために，$x=0$ の含む，小さい，長さ ε の領域だけで 0 でなく，それ以外のすべての点で 0 であるような関数を考えよう．長さ ε の領域における関数の値の細いことは，それがあまり大きく振動したりしないかぎりどうでもよいが，この領域全体にわたる積分が 1 であるとする．つまり，この関数はだいたい $\dfrac{1}{\varepsilon}$ のオーダーであるとする．このとき，積分を 1 に保ちながら $\varepsilon\to 0$ という極限をとったとき，この関数が $\delta(x)$ になると考えればよい．

$\delta(x)$ は，通常の数学的に定義された関数とは違う．通常の関数は，ある領域中の各点で，一定の値をとらなければならないが，この $\delta(x)$ は，そのようなものではなく，もっと一般的なもので，通常の関数と区別するためには，"improper function" とよぶのがよかろう．このように，$\delta(x)$ は，通常の数学的解析方法を勝手に使っていいといったものではなく，その使用にあたっては，明らかに矛盾の出ないような，比較的簡単な表現を取り扱う場合に限っておかなければならない．」

§2. デルタ関数の定義とその性質

まず，デルタ関数の定義だが，これは勝手な関数 $f(x)$ （といっても少々制限があるが）をもってきて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ f(x)\,\delta(x-a)=f(a) \tag{2.1}$$

で定義する．このとき，もちろん $f(a)$ が一定の値をもっていなければならない．しかし，このことにさえ注意すれば，デルタ関数をあたかも普通の関数のように取り扱ってもいっこうにかまわないことが多い．

II章に述べたように，デルタ関数の表現として

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \ \mathrm{e}^{ikx} \tag{2.2}$$

を採用することがあるが，これは次のように理解する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ f(x)\,\delta(x) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[f(x)\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{ikx}\right]\\ &=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}\\ &=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,f(\epsilon y)\frac{\sin y}{y}=f(0)\end{aligned} \tag{2.3}$$

このような理解のもとに式 (2.2) を

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}}\mathrm{d}k \ \mathrm{e}^{ikx}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \tag{2.4}$$

と書くこともある．最後の表現では，積分のあとにいつでも $\epsilon\to 0$ の極限をとるということが了解されているわけである．

この表現式（2.4）や式（2.2）を用いると，デルタ関数について，次のような性質を証明することができる．

(i)
$$\delta(x)=\delta(-x) \tag{2.5}$$

(ii)
$$\delta(cx)=\frac{1}{|c|}\delta(x) \tag{2.6}$$

(iii)
$$\delta((x-a)(x-b))=\frac{1}{|a-b|}\{\delta(x-a)+\delta(x-b)\} \tag{2.7}$$

デルタ関数の微分を定義するには式（2.4）を用いて

$$\delta'(x)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(x/\epsilon)}{\epsilon x}-\frac{\sin(x/\epsilon)}{x^2}\right\} \tag{2.8}$$

とする．ただし，この意味は，式(2.1)と同じように

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)\,\delta'(x)=-f'(0) \tag{2.9}$$

ということである．

デルタ関数のほかに，これと似た関数

$$\zeta(x)\equiv -i\int_0^{1/\epsilon}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{ikx}=\frac{1-\mathrm{e}^{ix/\epsilon}}{x}$$
$$=\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}-i\frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \tag{2.10a}$$

も重要である．右辺の第1項は，いわゆる $1/x$ の“主要部”とよばれ，これは $x=0$ の点以外では，$1/x$ としてふるまい，$x=0$ では0であるような関数である．これを

$$P\frac{1}{x}$$

と表すことが多い．第2項はいうまでもなく $-i\pi\delta(x)$ である．したがって

$$\zeta(x)=P\frac{1}{x}-i\pi\delta(x) \tag{2.10b}$$

と書いてもよい．また $\zeta(x)$ を

$$\zeta(x)=i\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{e}^{-k\epsilon}=\lim_{\epsilon\to +0}\frac{1}{x+i\epsilon} \tag{2.10c}$$

で定義することもある．したがって

$$\frac{1}{x+i\epsilon}=P\frac{1}{x}-i\pi\delta(x) \tag{2.10d}$$

また

$$P\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+\epsilon^2} \tag{2.11}$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \tag{2.12}$$

と書くこともある．これらの表現は度々用いられるが，すべて積分のあとで $\epsilon\to+0$ をとることを意味する．

このほか，δ や ζ 関数には，いろいろな表現が存在する．たとえば，量子力学の摂動論では

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\epsilon\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x^2} \tag{2.13}$$

を用いる．

デルタ関数を 3 次元の空間に拡張するには

$$\delta(\boldsymbol{x})\equiv\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{ikx} \tag{2.14}$$

とする．

ある与えられた関数 $f(x)$ のデルタ関数は

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{2.15}$$

である．ただし，$x_i\,(i=1, 2, \cdots)$ は，

$$f(x)=0 \tag{2.16}$$

の実根である．式(2.16)が実根を 1 つももたなければ，$\delta(f(x))$ は恒等的に 0 となる．

§3. 点　粒　子

3次元のデルタ関数は，点粒子の物理量を空間に分布したものとして表現するのに便利である．たとえば，ある点粒子の時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{\zeta}(t)$，その質量を m とするとき，

$$\rho(x) \equiv m\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}(t)) \tag{3.1}$$

は，質量の空間分布を表す．つまり，$\boldsymbol{\zeta}(t)$ のところに集中した質量を表現する．粒子が動くに従って，質量の分布も動いていく．デルタ関数の定義により，式(3.1)を全空間にわたって積分したものは，時間によらず常に m である．なお，左辺で x と書いたのは，空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t を一緒にしたものである．この立場では $\boldsymbol{x}$ と t とは全く独立な変数である．

式(3.1)に対応する質量の流れは

$$\boldsymbol{J}_m(x) = m\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}(t)) \tag{3.2}$$

であって，式(3.1)と式(3.2)とは連続の方程式で結ばれている．というのは，

$$\partial_t\rho_m(x) = -m\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}(t)) \tag{3.3a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m(x) = m\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}(t)) \tag{3.3b}$$

であって辺々加え合わせると

$$\partial_t\rho_m(x) + \nabla\cdot\boldsymbol{J}_m(x) = 0 \tag{3.4}$$

だからである．この関係は，点粒子の運動方程式などと無関係に，質量が時間によって変化しないかぎり成立するものである．

この点粒子が電荷をもっているとすると，電荷密度と電流密度を上と同様に定義することができる．さらに，N 個の粒子系へ拡張することも容易で，たとえば，i 番目の粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{\zeta}_i(t)$，電荷を e_i とすると，電荷電流密度はそれぞれ

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{N} e_i\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}_i(t)) \tag{3.5a}$$

$$\boldsymbol{J}(x) = \sum_{i=1}^{N} e_i\,\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}_i(t)) \tag{3.5b}$$

で定義される．これらが連続の方程式を満たすことの証明は容易であろう．

そのほか，粒系のエネルギー密度，エネルギーの流れの密度についても同様に

$$\rho^{(e)}(x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i{}^2(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}_i(t)) \tag{3.6a}$$

$$\boldsymbol{J}^{(e)}(x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i{}^2(t)\,\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}_i(t)) \tag{3.6b}$$

と定義すればよいが，今回は，

$$\partial_t\rho^{(e)}(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(e)}(x)=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)\,\ddot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}_i(t)) \tag{3.7}$$

となり，運動方程式を用いなければ，右辺が処理できない．外力が働いていなく，かつ，粒子相互の力が Newton の第 3 法則を満たすようなものであれば，右辺は 0 となる．自ら試みよ．

§ 4. 面積要素とデルタ関数

デルタ関数を用いて，空間における面 S を表現することを考えよう．いま，面 S が

$$f(\boldsymbol{x})=c \tag{4.1}$$

で表現されているとしよう．これは，3 個の変数に対する 1 個の条件だから，変数 2 個だけ独立であって，たしかに面を表現する．この面がなめらかであると仮定する．この仮定を数学的に表現すると

$$\nabla f(\boldsymbol{x})\neq 0 \tag{4.2}$$

である．よく知られているように $\nabla f(\boldsymbol{x})$ は，面 S 上の点 $\boldsymbol{x}$ における法線方向を向いている．式 (4.2) は，$\nabla f(\boldsymbol{x})$ が正規化できるということである．いま，空間の

$$f(\boldsymbol{x})>c \tag{4.3}$$

を満たす部分を，面 S の正の側，また

$$f(\boldsymbol{x})<c \tag{4.4}$$

を，面 S の負の側と約束すると，$\nabla f(\boldsymbol{x})$ は，面 S の正の側を向く．

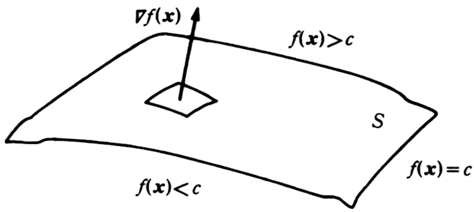


図 3.1

(1) 面積要素

さて，法線 ∇f をもつ面 S の面積要素をどのように表現したらよいだろうか？ 結果は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})\,\delta(f(\boldsymbol{x})-c)\,\mathrm{d}^3x \tag{4.5}$$

となるが，これを証明するまえに式 (4.5) の意味をまず考えてみよう．右辺のデルタ関数は式 (4.1) で表される表面を取り出す．∇f は面要素の法線方向を表すが，その大きさは $|\nabla f|$ だから，それは，(単位ベクトル) $\times|\nabla f|$ である．式 (4.5)の右辺の次元は

$$[\nabla f(\boldsymbol{x})][(f(\boldsymbol{x})-c)^{-1}][\mathrm{d}^3x]=L^2$$

であって，これはちょうど面積の次元である．

式 (4.5) は，面積の定義から直接証明することもできるが，ここでは，面と体積積分に関する Gauss の定理

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\nabla(\cdots)=\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})(\cdots) \tag{4.6}$$

を用いた証明を紹介する．式 (4.6) の右辺の ∂V というのは，V の端のこと，つまりここでは V を囲む表面 S のことである．

表面 S の外を正の側に選ぶと，

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\nabla(\cdots)=\int_\infty \mathrm{d}^3x\,\theta(c-f(\boldsymbol{x}))\nabla(\cdots)$$
$$=-\int_\infty \mathrm{d}^3x\,\nabla\theta(c-f(\boldsymbol{x}))\cdot(\cdots)$$

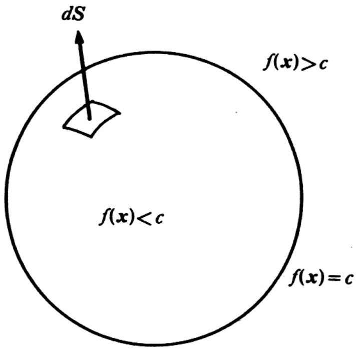


図 3.2

$$=\int_{\infty} \mathrm{d}^3 x \nabla f(\boldsymbol{x}) \delta(f(\boldsymbol{x})-c)(\cdots)$$

$$=\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})(\cdots) \tag{4.7}$$

体積は，全く勝手だから，したがって式 (4.5) が成り立つ．上の計算では，階段関数に対する

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)=\delta(x)$$

を用いた．

なお，ついでに書いておくと，面上の点 $\boldsymbol{x}_s$ を通る切面は

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s)\cdot\nabla_s f(\boldsymbol{x}_s)=0 \tag{4.8}$$

と表される．$\nabla_s f(\boldsymbol{x}_s)$ が，法線方向だから，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s$ はそれに直角方向を向いていなければならないということにすぎない．

［例 1］ 面分布している物理量

いま，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\Theta(\boldsymbol{x}) \tag{4.9}$$

という方程式を考える．$\Theta(\boldsymbol{x})$ が面の上に分布しているとき，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ を求めるという問題である．その面を

$$f(\boldsymbol{x})=c \tag{4.10}$$

とし，面密度を $\sigma(\boldsymbol{x})$ とすると

$$\Theta(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{x})|\nabla f(\boldsymbol{x})|\,\delta(f(\boldsymbol{x})-c) \tag{4.11}$$

そこで，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})\,\theta(f(\boldsymbol{x})-c)+\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x})\theta(c-f(\boldsymbol{x})) \tag{4.12}$$

と仮定し，式(4.8)に代入すると

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=&(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}))\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})\delta(f(\boldsymbol{x})-c)\\&+\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})\theta(f(\boldsymbol{x})-c)+\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x})\theta(c-f(\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{4.13}$$

となるから，これと式(4.11)を等しいとおくと

$$(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}))\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{x})|\nabla f(\boldsymbol{x})| \qquad \text{(面上で)} \tag{4.14}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})=\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x})=0 \qquad \text{(面外で)} \tag{4.15}$$

ということになる．

面上の点 $\boldsymbol{x}$ における単位法線を $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ とすると

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})/|\nabla f(\boldsymbol{x})| \tag{4.16}$$

したがって式(4.14)は

$$(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(面上で)} \tag{4.17}$$

となる．

同様の議論は

$$\nabla\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \tag{4.18}$$

に対しても成り立つ．$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ が面密度 $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x})$ で分布しているとき

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x})|\nabla f(\boldsymbol{x})|\,\delta(f(\boldsymbol{x})-c) \tag{4.19}$$

とおき，前と同様に考えていくと式(4.17) の代わりに

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times(\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(面上で)} \tag{4.20}$$

が得られる．

(2) 線要素

同様の考え方を，空間中の曲線にあてはめることもできる．空間曲線を表すためには，2個の曲面

$$f(\boldsymbol{x})=c \tag{4.21a}$$

$$g(\boldsymbol{x})=d \tag{4.21b}$$

をとり，それらの交わりを求めればよい．図の3.3をみよ．曲線の線要素は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})=(\nabla f(\boldsymbol{x})\times\nabla g(\boldsymbol{x}))\,\delta(f(\boldsymbol{x})-c)\,\delta(g(\boldsymbol{x})-d)\,\mathrm{d}^3x \tag{4.22}$$

ととるのが便利である．これがたしかに面要素を表していることを証明するには，Stokes の定理を用い，式 (4.5) と同様にやればよい．

なお，注意しておくと，曲線上の点 $\boldsymbol{x}_0$ において曲線に接する平面の面要素は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})=(\nabla_0 f(\boldsymbol{x}_0)\times\nabla_0 g(\boldsymbol{x}_0))\,\delta((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot(\nabla_0 f(\boldsymbol{x}_0)\times\nabla_0 g(\boldsymbol{x}_0)))\,\mathrm{d}^3x \tag{4.23}$$

となる．自ら試してみよ．

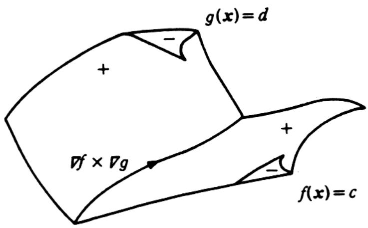


図 3.3 a

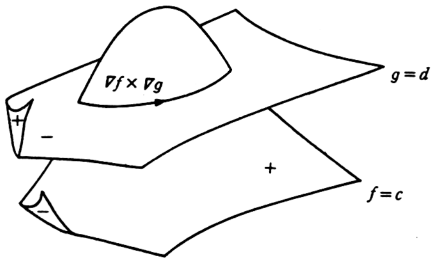


図 3.3 b

(3) パラメーターによる微分

表面を表す関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，一般にはいろいろなパラメーターを含んでいる．そのパラメーターの値により面の形が変わる．どのように変わるかを以下に考察しよう．いろいろなパラメーターを代表的に α とする．面上の点の座標を $\boldsymbol{x}_s$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}_s,\alpha)=c \tag{4.24}$$

だから，$\boldsymbol{x}_s$ はこれを通して α で依存することになる．そこで式 (4.24) を α で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}_s,\alpha)+\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\boldsymbol{x}_s,\alpha)=0 \tag{4.25}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\boldsymbol{x}_s, \alpha) = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_s, \alpha) \tag{4.26}$$

同様に，式 (4.21) で決まる曲線上の点の座標を $\boldsymbol{x}_l$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_l, \alpha) = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_l}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \nabla f(x_l, \alpha) \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} g(\boldsymbol{x}_l, \alpha) = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_l}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_l, \alpha) \tag{4.28}$$

である．また，階段関数の定義により

$$\nabla \theta(d - g(\boldsymbol{x}, \alpha)) = -\nabla g(\boldsymbol{x}, \alpha) \delta(g(\boldsymbol{x}, \alpha) - d) \tag{4.29a}$$

$$\nabla \delta(f(\boldsymbol{x}, \alpha) - c) = \nabla f(\boldsymbol{x}, \alpha) \cdot \delta'(f(\boldsymbol{x}, \alpha) - c) \tag{4.29b}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{V(\alpha)} \mathrm{d}^3 x (\cdots, \alpha) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{\infty} \mathrm{d}^3 x\, \theta(c - f(\boldsymbol{x}, \alpha))(\cdots, \alpha) \\
&= -\int_{\infty} \mathrm{d}^3 x \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\boldsymbol{x}, \alpha)\, \delta(f(\boldsymbol{x}, \alpha) - c)(\cdots, \alpha) \\
&\qquad + \int_{\infty} \mathrm{d}^3 x\, \theta(c - f(\boldsymbol{x}, \alpha)) \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cdots, \alpha) \\
&= \int_{\infty} \mathrm{d}^3 x \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_s, \alpha) \delta(f(\boldsymbol{x}, \alpha) - c)(\cdots, \alpha) \\
&\qquad + \int_{\infty} \mathrm{d}^3 x\, \theta(c - f(\boldsymbol{x}, \alpha)) \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cdots, \alpha) \\
&= \int_{\partial V(\alpha)} \mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_s) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s}{\mathrm{d}\alpha}(\cdots, \alpha) + \int_{V(\alpha)} \mathrm{d}^3 x \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cdots, \alpha)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

が得られる．全く同様にして，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{S(\alpha)} \mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_s)(\cdots, \alpha) &= \int_{\partial S(\alpha)} \left[\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_s) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s}{\mathrm{d}\alpha} \right] \nabla (\cdots, \alpha) \\
-\int_{\partial S(\alpha)} \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}_l) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_l}{\mathrm{d}\alpha}(\cdots, \alpha) &+ \int_{S(\alpha)} \mathrm{d}S(\boldsymbol{x}_s) \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cdots, \alpha)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

も成り立つ．これらは，動いている回路の中の起電力などを求めるのに便利である．例は，あとで挙げる．

いま，α として時間 t をとると，領域が時間的に移動している場合の，全物理量などの時間的変化を調べることができる．たとえば，式（4.30）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\mathrm{d}^3x\,\Gamma(\boldsymbol{x},t)=\int_{\partial V(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_S)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_S}{\mathrm{d}t}\Gamma(\boldsymbol{x},t)+\int_{V(t)}\mathrm{d}^3x\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\boldsymbol{x},t) \tag{4.32}$$

いま，$\Gamma(\boldsymbol{x},t)$ に対して，バランス方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\boldsymbol{x},t)+\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},t)=q(\boldsymbol{x},t) \tag{4.33}$$

が成り立つとすると，式（4.32）の最後の項に式（4.33）を用い，Gauss の定理を用いて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\mathrm{d}^3x\,\Gamma(\boldsymbol{x},t)=\int_{\partial V(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_S)\cdot\left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_S}{\mathrm{d}t}\Gamma(\boldsymbol{x}_S,t)-\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_S,t)\right\}+\int_{V(t)}\mathrm{d}^3x\,q(\boldsymbol{x},t) \tag{4.34}$$

が得られる．この関係式（4.34）の物理的な解釈は明らかであろう．積分領域が動いているための補正が，右辺第1項に表れている．

［例 2］ Faraday の法則

いま，ある曲面 S を貫いている磁場を考える．曲面が動いているとすると面 S を通る磁束の時間的変化は，式（4.31）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\int_{S(t)}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_S}{\mathrm{d}t}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)-\int_{\partial S(t)}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_l}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)+\int_{S(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.35}$$

Maxwell 方程式によって，右辺を書き換えると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=-\int_{\partial S(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_l}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\right)-\int_{\partial S(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.36}$$

という，よく知られた関係が得られる．面 S が動いている効果が，右辺第1

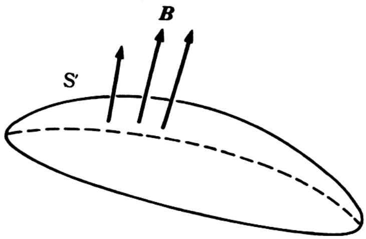


図 3.4

項に表れている.

[例 3] 輪電流

半径 a の輪を流れる電流による磁場を計算してみよう. この輪の方向を単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ で表す. いま $f(\boldsymbol{x})$ として r を, $g(\boldsymbol{x})$ として $-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}$ ととると

$$f(\boldsymbol{x})\equiv r=a \tag{4.37a}$$

$$g(\boldsymbol{x})\equiv -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}=0 \tag{4.37b}$$

式 (4.37a) は, 原点を中心とする球であり, 式 (4.37b) のほうは, 原点を通る $\boldsymbol{e}$ 方向を法線とする球面であって, この2つの面の交わるところが, ちょうど輪になる. この輪を流れる電流を I とすると, 電流密度は

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=I\frac{\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}}{a}\delta(r-a)\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{4.38}$$

である. これによる磁場を求めるには, この輪から十分遠いところで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\boldsymbol{x}}{r}-\frac{\boldsymbol{x}'}{r}+3\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+\cdots\right\}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\end{aligned} \tag{4.39}$$

と展開する. 次に

$$\int d^3x'x_i'\delta(r'-a)\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}')=0 \tag{4.41a}$$

$$\int d^3x'x_i'x_j'\delta(r'-a)\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}')=\pi a^3(\delta_{ij}-e_ie_j) \tag{4.41b}$$

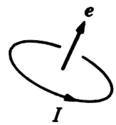


図 3.5

を用いると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')=\frac{\mu_0}{2}I\frac{a^2}{r^3}\left\{\boldsymbol{e}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})+\cdots\right\} \tag{4.42}$$

が得られる．なお，この輪電流は，磁気能率

$$\boldsymbol{\mu}\equiv\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\pi I a^2\boldsymbol{e} \tag{4.43}$$

をもっている．

［例 4］ 微分形式による $\boldsymbol{E}$ の決定

静的な電荷分布による電場を計算する場合，通常は系の対称性を利用し，Gauss の法則（積分形）を用いて計算することが多い．もちろん，こうしてもいっこうにかまわないが，デルタ関数を用いると，積分形に頼らず微分形のまま電場を求めることができる．その例を2，3挙げておく．

(i) 直線上の一定の電荷分布による電場

直線を z 軸にとり，電荷分布を σ とすると，円筒座標を用いると，Maxwell の方程式は

$$\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{1}{r}E_r=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

$$E_z=E_\theta=0$$

となる．したがって，容易に確かめられるように

$$E_r=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\theta(r)=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

が得られる．

(ii) 平面上の，一定の電荷分布による電場

平面を x-y 面にとり，電荷分布を ρ_p とすると

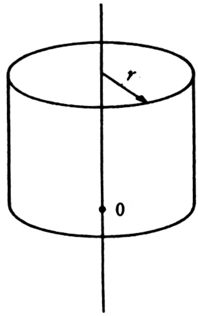


図 3.6

$$\rho(\boldsymbol{x})=\rho_p\delta(z)$$

微分方程式は，やはり円筒座標をとると

$$\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{1}{r}E_r+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho_p}{\varepsilon_0}\delta(z)$$

したがって

$$E_z=\frac{\rho_p}{2\varepsilon_0}\varepsilon(z)$$

$$E_r=E_\phi=0$$

となる．

(iii) 球殻上の電荷分布による電場

この場合には，球面座標をとり，微分方程式

$$\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{2}{r}E_r=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\delta(r-a)$$

$$E_\theta=E_\phi=0$$

を解けばよい．ただし ρ_sは球殻上の電荷密度，a はその半径である．答えは明らかに

$$E_r=\frac{Q}{4\pi r^2}\theta(r-a)$$

で，球殻の外では Coulomb の法則が成り立っている．これらの例は，すべてよく知られたものである．

§5. 面の接線

デルタ関数を用いて，面を表現する方法を練習したついでに，面の接線について考えておこう．（これは，デルタ関数とは一応関係はないが．）

面が

$$f(\boldsymbol{x})=c \tag{5.1}$$

で与えられているとき，これから，3×3 の行列

$$D_{ij}=\delta_{ij}-\frac{1}{(\nabla f\cdot\nabla f)}\partial_i f\,\partial_j f \tag{5.2}$$

を作る．容易にわかるように

$$D_{ij}\,\partial_j f=0 \tag{5.3}$$

$$D_{ij}\,\partial_i f=0 \tag{5.4}$$

である．また，このために

$$D_{ij}D_{jk}=D_{ik} \tag{5.5}$$

が成り立つ．D_{ij} は対称行列だから，直交変換 S で対角化できるが，式(5.5)のために D の固有値は，1か0に限られる．D の位数を2と仮定すると，2個の固有値1，1個の固有値0があるはずで，

$$D_{ij}=S_{ik}d_kS_{kj}^{-1} \tag{5.6}$$

$$d_k=\begin{cases}1 & k=1,2\\ 0 & k=0\end{cases} \tag{5.7}$$

と書くことができる．

そこで

$$t_i^{(1)}\equiv S_{i1}=S_{1i}^{-1} \tag{5.8}$$

$$t_i^{(2)}\equiv S_{i2}=S_{2i}^{-1} \tag{5.9}$$

とおくと，これらがまさに，$\boldsymbol{x}$ 点における，2個の接線方向の単位ベクトルになっている．それをみるには，これらが，法線方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})/|\nabla f(\boldsymbol{x})| \tag{5.10}$$

と直角であり，$\boldsymbol{t}^{(1)}$，$\boldsymbol{t}^{(2)}$ どうしが直交することをみればよいが，それは変換

Sの直交性から明らかであろう．式 (5.6) は $\boldsymbol{t}^{(1)}$, $\boldsymbol{t}^{(2)}$, $\boldsymbol{n}$ の完全性にすぎない．

§6. 定数係数の常微分方程式

デルタ関数がいろいろと便利に使われる例として，次に，簡単な常微分方程式を考察するが，これには，"デルタ関数と微分方程式"（並木美喜夫，岩波書店）があるから，詳しいことは，それを参照されたい．

まず，もっとも簡単な，実定数係数の同次常微分方程式

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+b\right]f_0(t)=0 \tag{6.1}$$

を考えよう．これは，時間について1階の微分方程式だから，$f_0(t)$ の初期値 $f_0(t_0)$ が与えられると解は唯一に決まる．そこで $t=t_0$ で1になるような式(6.1)の解を $G_0(t-t_0)$ とすると，

$$f_0(t)=G_0(t-t_0)f_0(t_0) \tag{6.2}$$

と書くことができる．このような $G_0(t-t_0)$ が求まったとし，次に非同次実常微分方程式

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+b\right]f(t)=\rho(t) \tag{6.3}$$

を考える．ここで $\rho(t)$ は，与えられた時間の関数とする．この非同次方程式を解くには，まず同次常微分方程式の解 $G_0(t-t_0)$ を用い

$$G(t-t_0)\equiv\theta(t-t_0)G_0(t-t_0) \tag{6.4}$$

を定義する．ここで，$\theta(t-t_0)$ は例の階段関数で，II章の式 (6.15) で定義されたものである．G_0 は初期条件

$$G_0(0)=1 \tag{6.5}$$

を満たすから，階段関数の性質

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t-t_0)=\delta(t-t_0) \tag{6.6}$$

を用いると，容易に

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+b\right]G(t-t_0)=\delta(t-t_0) \tag{6.7}$$

が得られる．したがって，初期値

$$f(t_0)=f_0(t_0) \tag{6.8}$$

をもつ式（6.3）の解は

$$f(t)=f_0(t)+\int_{t_0}^{\infty}\mathrm{d}t'\,G(t-t')\,\rho(t') \tag{6.9a}$$

$$=f_0(t)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,G_0(t-t')\,\rho(t') \tag{6.9b}$$

となる．これが，式（6.3）と初期条件（6.8）をもつことの証明は，自ら試してほしい．式（6.4）で定義した関数Gは式（6.7）を満たす．式（6.7）を満たす関数を一般に方程式（6.3）の **Green 関数**とよぶ．上の例で，$G_0(t-t_0)$ はすぐわかるように

$$G_0(t-t_0)=\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}$$

である．したがって，$b>0$ とすると II 章（6.15c）により

$$G(t-t_0)=\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\,\theta(t-t_0)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\omega+ib}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \tag{6.7'}$$

となる．

次に，2次の微分方程式（b, cともに実数）

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+c\right]f_0(t)=0 \tag{6.10}$$

を考えよう．初期条件

$$f_0(t_0),\ f_0'(t_0) \tag{6.11}$$

を満たすような解を求めるためには

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+c\right]G_0(t-t_0)=0 \tag{6.12}$$

の解で

$$G_0(0)=0 \tag{6.13a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_0(t-t_0)\right|_{t=t_0}=1 \tag{6.13b}$$

を満たすような解を求め

$$f_0(t)=G_0(t-t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}f_0(t_0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_0(t-t_0)f_0(t_0) \tag{6.14}$$

とすればよい．式（6.13）のために，初期条件（6.11）は自動的に満たされている．

次に，非同次常微分方程式

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+c\right]f(t)=\rho(t) \tag{6.15}$$

の解を求めるには，前の場合と全く同様にして，まずGreen 関数

$$G(t-t_0)\equiv\theta(t-t_0)G_0(t-t_0) \tag{6.16}$$

を作る．容易にわかるように，条件（6.13）により，これは

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+c\right]G(t-t_0)=\delta(t-t_0) \tag{6.17}$$

を満たすから，式（6.15）の解は

$$f(t)=f_0(t)+\int_{t_0}^{\infty}\mathrm{d}t'\,G(t-t')\rho(t') \tag{6.18a}$$

$$=f_0(t)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,G_0(t-t')\rho(t') \tag{6.18b}$$

で与えられる．これが式（6.15）の解であり，かつ初期条件（6.11）を満たすことはすぐわかると思う．自ら確かめよ．

なお，上の G_0 や G が

$$G_0(t-t_0)=\frac{1}{2i\sqrt{4c-b^2}}\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}(t-t_0)}\times\{\mathrm{e}^{-i\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}(t-t_0)}-\mathrm{e}^{i\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}(t-t_0)}\}$$

$$G(t-t_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\omega^2-c+ib\omega}\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \tag{6.17'}$$

で与えられることも，自ら試してほしい．ただし，

$$b>0 \qquad 4c-b^2>0$$

を仮定した．

注 意

上では，まず，同次常微分方程式の解 G_0 を求め，それから，Green 関数

Gを求めるという遠道をとったが，これは，実は不必要なことで，直ちに Fourier 積分

$$G(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\hat{G}(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)}$$

を仮定し，方程式（6.7）か（6.17）に代入すると

$$[i\omega+b]\,\hat{G}(\omega)=1$$

$$[-\omega^2-ib\omega+c]\,\hat{G}(\omega)=1$$

という代数方程式が得られるから，それぞれ

$$\hat{G}(\omega)=\frac{i}{\omega+ib}$$

$$\hat{G}(\omega)=-\frac{1}{\omega^2-c+ib\omega}$$

となり，式（6.7′）や式（6.17′）が得られる．$b>0$ とか $4c-b^2>0$ とかは，Fourier 展開可能性の条件である．

§7. 定数係数の偏微分方程式

§6 のやり方は，偏微分方程式の場合に，容易に拡張することができる．ここでは，2，3の例をやってみるにとどめる．

［例 5］ 拡散方程式

物質の質量密度，およびその流れを，それぞれ $\rho(x)$，$\boldsymbol{J}(x)$ としよう．これらに対しては，連続の方程式

$$\partial_t\rho(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x)=0 \tag{7.1}$$

が成り立つ．これに対し，物質を放置すると，質量密度は，だんだんと一様になっていくという条件，たとえば

$$\boldsymbol{J}(x)=-\kappa^2\nabla\rho(x) \tag{7.2}$$

という条件をつけ，式（7.1）と連立させると

$$\partial_t\rho(x)=\kappa^2\nabla^2\rho(x) \tag{7.3}$$

という方程式が得られる．（式(7.2)のような式を**構成方程式**とよぶことがある．）式(7.3)が**拡散方程式**とよばれるものである．

方程式(7.3)の Green 関数を求めるには，

$$[\partial_t - \kappa^2 \nabla^2]\, G(x-x_0) = \delta(t-t_0)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{7.4}$$

を解けばよい．例によって，Fourier 展開

$$G(x-x_0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}\omega\, \hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega)\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)} \mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \tag{7.5}$$

を仮定し，式(7.4)に代入すると

$$[-i\omega + \kappa^2 \boldsymbol{k}^2]\, \hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 \tag{7.6}$$

したがって，II章の式(6.15c)，式(6.16)により

$$\begin{aligned} G(x-x_0) &= \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}\omega \frac{1}{\omega + i\kappa^2 \boldsymbol{k}^2}\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}\, \mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{-\kappa^2 \boldsymbol{k}^2(t-t_0)}\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}\theta(t-t_0) \\ &= \frac{1}{[4\pi\kappa^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2}{2\kappa^2(t-t_0)}}\theta(t-t_0) \end{aligned} \tag{7.7}$$

となる．

この場合，$t \to t_0$ の極限は注意してとらなければならない．この極限で，指数関数の幅はだんだん小さくなり，指数関数の前の係数はだんだん大きくなるから，極限ではデルタ関数になる．自分で注意深く極限をとって調べてみるとよい．

［例 6］ 波動方程式

流体力学によると，質量の流れ

$$\boldsymbol{J}(x) = \rho(x)\boldsymbol{v}(x) \tag{7.8}$$

に対して，連続の方程式 (7.1) が成り立つ．ここで $\boldsymbol{v}(x)$ は，点 $\boldsymbol{x}$，時刻 t における質量の速度である．このほか，Euler の方程式

$$\rho(x)\{\partial_t \boldsymbol{v}(x) + (\boldsymbol{v}(x)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(x)\} = -\nabla P(x) \tag{7.9}$$

が成り立っていなければならない．右辺の $P(x)$ とは，点 $\boldsymbol{x}$，時刻 t における圧力である．またここでは簡単のため，外力は働いていないとした．式(7.1)，式 (7.9) は非線形方程式で，このままでは解けないから，密度と圧力が定数から少しだけずれているとして

$$\rho(x)=\rho_0+\Delta\rho(x) \tag{7.10a}$$

$$P(x)=P_0+\frac{1}{\kappa\rho_0}\Delta\rho(x) \tag{7.10b}$$

とおき，ずれ $\Delta\rho$ が小さいとして，その 2 次以上の項を省略すると，線形の連立方程式

$$\partial_t(\Delta\rho(x))+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}(x)=0 \tag{7.11a}$$

$$\rho_0\,\partial_t\,\boldsymbol{v}(x))=-\frac{1}{\kappa\rho_0}\nabla(\Delta\rho(x)) \tag{7.11b}$$

が得られる．これらから $\boldsymbol{v}(x)$ を消去すると

$$[\partial_t{}^2-c_s{}^2\nabla^2](\Delta\rho(x))=0 \tag{7.12}$$

という波動方程式が得られる．ただし

$$c_s{}^2\equiv\frac{1}{\kappa\rho_0} \tag{7.13}$$

で，これは音速の 2 乗を表す．式 (7.12) は，質量密度の定数からのずれが速度 c_s の波として伝わっていくことを示している．

ここでは，式 (7.12) を少々一般化して

$$[\partial_t{}^2-c^2(\nabla^2-\kappa^2)]\phi(x)=0 \tag{7.14}$$

を考えよう．これは，**Klein–Gordon 方程式**として知られているもので，$\kappa=0$ とおくと，式 (7.12) が再現される．この Klein-Gordon 方程式の解は，§8 で詳しく考えるが，ここで，また Fourier 展開

$$G(x-x_0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega\,\widehat{G}(\boldsymbol{k},\omega)\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \tag{7.15}$$

を仮定すると，式 (7.14) の Green 関数は

$$[-\omega^2+c^2(\boldsymbol{k}^2+\kappa^2)]\,\widehat{G}(\boldsymbol{k},\,\omega)=1 \tag{7.16}$$

を満たすようなものでなければならないことがわかる．

[…] の中の量は，

$$\omega_k\equiv c\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2} \tag{7.17}$$

とおいたとき

$$\omega=\pm\,\omega_k \tag{7.18}$$

で0になることがわかる．(式 (7.6) では，ω が実のところで同様なことは起こらなかった．)すると式(7.16)の右辺が常に1であるためには，$\hat{G}(\boldsymbol{k},\omega)$ は $\omega=\pm\omega_k$ で発散していなければならない．この発散項の取り扱い方によって，いろいろと異なった Green 関数が考えられるが，このことは次の§8で考えることにし，ここでは§6の式 (6.17′) の表示で b を ϵ とおきかえ，$\epsilon\to 0$ の極限をとってみよう．すると

$$G(x-x_0)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega\frac{1}{\omega^2-\omega_k{}^2+i\epsilon\omega}\,\mathrm{e}^{ik(x-x_0)}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \tag{7.19a}$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega\frac{1}{(\omega+i\epsilon)^2-\omega_k{}^2}\,\mathrm{e}^{ik(x-x_0)}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \tag{7.19b}$$

となる．積分のあとで $\epsilon\to 0$ の極限をとる．

このGreen関数が，$t-t_0<0$のとき，恒等的に0となるということは，径路積分に関する少しの知識があれば証明できるが，これは演習問題にしておく．ω を $i\epsilon$ だけずらした結果，ω の複素平面では，上半分に極がないということを利用すればよい．式 (7.19) の Green 関数を，**Retarded Green 関数**という．

［例 7］ Helmholtz の方程式

波動方程式 (7.12) に戻り，時間変数を分離して

$$\Delta\rho(x)\equiv\mathrm{e}^{-i\omega t}u(\boldsymbol{x}) \tag{7.20}$$

とおくと，$u(\boldsymbol{x})$ は

$$\left[\nabla^2+\frac{\omega^2}{c_s{}^2}\right]u(\boldsymbol{x})=0 \tag{7.21}$$

を満たさなければならない．これを **Helmholtz の方程式**という．この方程式を解くためには，II章の式(6.18)

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\pm ilr}}{r}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\left[P\frac{1}{k^2-l^2}\pm i\pi\delta(k^2-l^2)\right]\mathrm{e}^{ikx} \tag{7.22}$$

を利用する．ここで，式 (2.10) を用いた．式 (7.22) により

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\cos lr}{r}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,P\frac{1}{k^2-l^2}\mathrm{e}^{ikx} \tag{7.23}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\sin lr}{r}=-\frac{\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\delta(k^2-l^2)\,\mathrm{e}^{ikx} \tag{7.24}$$

である．したがって，式（7.21）の Green 関数は

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\cos\left\{\frac{\omega}{c_s}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\right\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \tag{7.25a}$$

である．式（7.23）から容易にわかるように

$$\left[\nabla^2+\frac{\omega^2}{{c_s}^2}\right]G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{7.25b}$$

が成り立つからである．

なお，

$$G_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\sin\left\{\frac{\omega}{c_s}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \tag{7.26a}$$

は，同次方程式を満たす．つまり

$$\left[\nabla^2+\frac{\omega^2}{{c_s}^2}\right]G_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0 \tag{7.26b}$$

である．

いうまでもなく，一般に

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+aG_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{7.27}$$

は，非同次方程式（7.25b）を満たすから，やはり Green 関数である．物理的に重要なのは $a=-i$ の場合，つまり

$$G^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left\{-i\frac{\omega}{c_s}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\right\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \tag{7.28}$$

で，これは，散乱中心 $\boldsymbol{x}_0$ からずっと遠方における外向散乱波を表している．$a=i$ とすると

$$G^{(-)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left\{i\frac{\omega}{c_s}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\right\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \tag{7.29}$$

が得られ，これは，内向散乱波である．

［例 8］ 静的湯川方程式

方程式（7.14）の，時間微分の項を落とすと，静的な方程式

$$(\nabla^2-\kappa^2)\phi_s(\boldsymbol{x})=0 \tag{7.30}$$

が得られる．Helmholtz の方程式とは，κ^2 の前の符号が異なっている．

Green 関数を求めるために

$$[\nabla^2-\kappa^2]G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{7.31}$$

に Fourier 積分

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\widehat{G}(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)} \tag{7.32}$$

を入れると

$$[\boldsymbol{k}^2+\kappa^2]\widehat{G}(\boldsymbol{k})=-1 \tag{7.33a}$$

$$\therefore\quad \widehat{G}(\boldsymbol{k})=-\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2} \tag{7.33b}$$

したがって

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{\kappa}^2}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)} \tag{7.34a}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\kappa|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\qquad(\kappa>0) \tag{7.34b}$$

となる．ここでは，式（7.34a）から式（7.34b）へいくときに，II章の式（6.17）を用いたが，球面座標を用いて直接計算することもできる．

§8. Klein-Gordon 方程式とその解

Klein-Gordon 方程式

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\partial_t{}^2-\kappa^2\right)f(x)\equiv(\Box-\kappa^2)f(x)=0 \tag{8.1}$$

は，相対論的場の理論の基本的な方程式だからここで少し詳しく調べておく．

式（8.1）に

$$f(x) \sim e^{ikx} \tag{8.2}$$

を代入する．ただし

$$\begin{aligned} kx &\equiv \boldsymbol{kx} - k_0 x_0 \\ &= \boldsymbol{kx} - ck_0 t \end{aligned} \tag{8.3}$$

を意味する．すると，4次元のベクトル $k_\mu (k_4 = ik_0)$ は

$$k_\mu k_\mu + \kappa^2 = \boldsymbol{k}^2 - k_0^2 + \kappa^2 = 0 \tag{8.4}$$

を満たさなければならない．つまり

$$k_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \kappa^2} \equiv \pm\frac{1}{c}\omega_k \tag{8.5}$$

でなければならない．したがって式（8.1）の独立な解として

$$f_k^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{c}{2\omega_k}\delta\left(k_0 - \frac{1}{c}\omega_k\right)e^{ikx} \tag{8.6a}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\theta(k_0)\delta(k^2 + \kappa^2)e^{ikx} \tag{8.6b}$$

および

$$f_k^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{c}{2\omega_k}\delta\left(k_0 + \frac{1}{c}\omega_k\right)e^{ikx} \tag{8.7a}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\theta(-k_0)\delta(k^2 + \kappa^2)e^{ikx} \tag{8.7b}$$

が得られる．式（8.6a）から式（8.6b），式（8.7a）から式（8.7b）へいくには，デルタ関数の性質式（2.6）を用いて得られる

$$\begin{aligned} \delta(k^2 + \kappa^2) &= \delta\left\{\left(k_0 - \frac{1}{c}\omega_k\right)\left(k_0 + \frac{1}{c}\omega_k\right)\right\} \\ &= \frac{c}{2\omega_k}\left\{\delta\left(k_0 - \frac{1}{c}\omega_k\right) + \delta\left(k_0 + \frac{1}{c}\omega_k\right)\right\} \end{aligned}$$

を使った．θ は例によって階段関数である．

解 $f_k^{(\pm)}(x)$ は，式（8.1）を満たし，それぞれ正と負の振動数のみを含んでいる．これら2個の解を組み合わせて，いろいろと物理的に便利な解を作ることができる．たとえば

$$\varDelta(x)\equiv -i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\{f_k^{(+)}(x)-f_k^{(-)}(x)\}$$
$$=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,\epsilon(k_0)\delta(k^2+\kappa^2)\,e^{ikx} \tag{8.8}$$

$$\varDelta^{(1)}(x)\equiv\int\mathrm{d}^4k\{f_k^{(+)}(x)+f_k^{(-)}(x)\} \tag{8.9}$$

ただし，$\epsilon(x)$ はII章の式 (6.13) で定義した階段関数である．これらの Fourier 積分は，あとで詳しく実行する．そのまえに関数 (8.8) の性質を調べておくと：

(i)
$$\varDelta(x)\Big|_{t=0}=0 \tag{8.10}$$

これは，式 (8.8) から明らかであろう．

(ii)
$$\dot{\varDelta}(x)\Big|_{t=0}=-c\,\delta(\boldsymbol{x}) \tag{8.11}$$

これも，式(8.8)の表現を用いると容易に導くことができる．

これら 2 個の関係により

$$\bar{\varDelta}(x)=\frac{1}{2}\epsilon(x_0)\varDelta(x) \tag{8.12}$$

が，Klein-Gordon 方程式の Green 関数になっていることが，すぐわかる．すなわち

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\epsilon(x_0)=2\delta(x_0) \tag{8.13}$$

を用いて，たんねんに計算すると

$$(\Box-\kappa^2)\bar{\varDelta}(x)=\delta(x_0)\delta(\boldsymbol{x})\equiv\delta^{(4)}(x) \tag{8.14}$$

が証明できる．$\bar{\varDelta}(x)$ の Fourier 積分表示は

$$\bar{\varDelta}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\,P\frac{1}{k^2+\kappa^2}\mathrm{e}^{ikx} \tag{8.15}$$

である．P はいうまでもなく，Cauchy の主値を意味する．(§2 参照)

物理的に重要な Green 関数は，まえにも考えた（式 (7.19) 参照） Retarded Green 関数

$$\varDelta^{(r)}(x)=\theta(x_0)\varDelta(x)$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2-(k_0+i\epsilon)^2} e^{ikx} \tag{8.16}$$

と，因果 Green 関数とよばれる

$$\Delta_C(x)=\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x)-\theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x)$$
$$=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{1}{k^2+\kappa^2-i\epsilon} e^{ikx} \tag{8.17}$$

である．ただし

$$\Delta^{(\pm)}(x)\equiv\mp i\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\, f_k^{(\pm)}(x) \tag{8.18}$$

である．

これらの関数 (8.16)，(8.17) も $\bar{\Delta}(x)$ と同様に式 (8.14) を満たしている．ただし，これらの関係を扱うとき

$$\epsilon(x_0)=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau P\frac{1}{\tau} e^{i\tau x_0} \tag{8.19}$$

$$\theta(x_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau-i\epsilon} e^{i\tau x_0} \tag{8.20}$$

を用いた．

いま，微分方程式

$$(\Box-\kappa^2)\phi(x)=\eta(x) \tag{8.21}$$

が与えられたとき，式 (8.16) を用いると

$$\phi(x)=\phi^{in}(x)+\int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \Delta^{(r)}(x-x')\eta(x') \tag{8.22}$$

が得られる．ただし，$\phi^{in}(x)$ とは，同次方程式の解で，つまり

$$(\Box-\kappa^2)\phi^{in}(x)=0 \tag{8.23a}$$

であり，初期条件

$$\lim_{t\to-\infty}[\phi(x)-\phi^{in}(x)]=0 \tag{8.23b}$$

が満たされているようなものである．式 (8.22) が式 (8.21) を満たすことを示すには，左から $(\Box-\kappa^2)$ をかけてみればよい．

式 (8.22) は Yang-Feldman 方程式といわれる．これをみると，Retarded

Green 関数 $\varDelta^{(r)}$ は過去における源 $\eta(x')$ の効果を集積するものであることがわかる．それは，定義 (8.16) により $x_0-x_0'>0$ だけが効いてくるからである．

因果 Green 関数 (8.17) のほうは，量子場の理論，特に Feynman-Dyson の理論で活躍する．

そこで，$\varDelta$ の Fourier 積分 (8.8) を実行したいが，その代わりまず $\bar{\varDelta}$ のそれ (8.15) を実行し

$$\varDelta(x)=2\epsilon(x_0)\bar{\varDelta}(x) \tag{8.24}$$

を用いて，$\varDelta(x)$ の性質をみていくのが普通である．そのために

$$P\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}a\,\epsilon(a)\,\mathrm{e}^{ia\tau} \tag{8.25}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{i(ak^2+kx)}&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{iak^2}\,\mathrm{e}^{-ix^2/4a}\\&=i\frac{\pi^2}{a^2}\epsilon(a)\,\mathrm{e}^{-ix^2/4a}\end{aligned} \tag{8.26}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}\bar{\varDelta}(x)&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\,P\frac{1}{k^2+\kappa^2}\mathrm{e}^{ikx}\\&=-\frac{1}{2(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}a\,\epsilon(a)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{i(ak^2+kx)}\,\mathrm{e}^{ia\kappa^2}\\&=-\frac{1}{32\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}a\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-ix^2/4a}\,\mathrm{e}^{ia\kappa^2}\end{aligned} \tag{8.27}$$

が得られる．そこで，

$$\alpha=\frac{1}{4a} \tag{8.28}$$

とすると

$$\begin{aligned}\bar{\varDelta}(x)&=-\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{e}^{i\alpha x^2-i\kappa^2/4\alpha}\\&=-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\alpha\cos\left(-\alpha x^2+\frac{\kappa^2}{4\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha \sin\left(-\alpha x^2+\frac{\kappa^2}{4\alpha}\right)\frac{1}{\alpha} \tag{8.29}$$

となる．このままでは，まだそのふるまいがわからない．そこで，次に

$$\alpha=\frac{\kappa}{2|x^2|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{\zeta} \tag{8.30}$$

という，めんどうな変数変換をすると

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha \sin\left(-\alpha x^2+\frac{\kappa^2}{4\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta \sin\left[\frac{\kappa|x^2|^{\frac{1}{2}}}{2}\left\{-\frac{x^2}{|x^2|}\mathrm{e}^{\zeta}+\mathrm{e}^{-\zeta}\right\}\right]$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta \sin\{\kappa(-x^2)^{\frac{1}{2}}\cosh\zeta\} & x^2<0 \quad (\text{時間的})\\[2ex] \displaystyle -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta \sin\{\kappa(x^2)^{\frac{1}{2}}\sinh\zeta\} & x^2>0 \quad (\text{空間的})\end{cases} \tag{8.31}$$

であって，これは，Bessel 関数で表され

$$=\begin{cases}\pi J_0\left(\kappa\sqrt{-x^2}\right) & x^2<0 \quad (\text{時間的})\\[2ex] 0 & x^2>0 \quad (\text{空間的})\end{cases} \tag{8.32}$$

となる．したがって，式 (8.29) は，最終的に

$$\bar{\varDelta}(x)=-\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)-\frac{\kappa^2}{8\pi}\begin{cases}\dfrac{\pi J_1(\kappa\sqrt{-x^2})}{\kappa\sqrt{-x^2}} & x^2<0 \quad (\text{時間的})\\[2ex] 0 & x^2>0 \quad (\text{空間的})\end{cases} \tag{8.33}$$

となる．これをみれば明らかなように，$\bar{\varDelta}$ は，時間的な方向に有限，空間的方向には 0，光円錐上では，デルタ関数的な無限大をとっている．式(8.24)によって $\varDelta(x)$ に直すと

$$\varDelta(x)=-\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2)-\frac{\kappa^2}{4\pi}\varepsilon(x_0)\begin{cases}\dfrac{\pi J_1(\kappa\sqrt{-x^2})}{\kappa\sqrt{-x^2}} & x^2<0 \quad (\text{時間的}) \\ 0 & x^2>0 \quad (\text{空間的})\end{cases} \tag{8.34}$$

となる．光円錐の外側（空間的方向）では 0 となっているから，相対論的粒子の運動を論じる場合，この関数が重要なのである．

ついでに，電磁気学のとき重要であった Retarded 関数は，式（8.16）で $\kappa=0$ とすると

$$D^R(x-x_0)=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\delta\left(t-t_0-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \tag{8.35}$$

となる．これは

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\partial_t{}^2\right]D^R(x-x_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\delta(c(t-t_0)) \tag{8.36}$$

を満たしている．

演習問題　III

1. デルタ関数についての性質

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

を証明せよ．

2. $$\delta((x-a)(x-b))=\frac{1}{|a-b|}\{\delta(x-a)+\delta(x-b)\}$$

を導け．ただし　$a\neq b$.

3. $$\delta(x^2-a^2)=\,?$$

4. $$\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

を証明せよ．ただし，x_i は $f(x)=0$ の実根で，すべて相異なるとする．

5. 線要素の式（4.22）が正しいことを Stokes の式を用いて証明せよ．

6. 式（4.36）の物理的意味を考えよ．

7. Maxwell の方程式の 1 つ

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x)=\mu_0\boldsymbol{J}(x)+\epsilon_0\mu_0\partial_t\boldsymbol{E}(x)$$

より，動いているある面を貫く電束を求めよ．

8. 積分式（4.41）を確認せよ．

9. 半径 a の球内を一様な密度で分布している電荷による電場を，微分形式により計算せよ．

10. 式（6.9）が微分方程式（6.3）を満たすこと，および初期条件（6.8）を満たすことを確認せよ．

11. 前問と同様のことを，式（6.18）により試してみよ．

12. Green 関数（7.19）が $t-t_0<0$ で 0 になることを証明せよ．

13. 式（7.34a）から式（7.34b）を導け．

14. 式（8.7）を確認せよ．

IV. 回転と回転する座標系

§1. は じ め に

回転については，日本では，山内恭彦先生の名著“回転群およびその表現論”がある．回転といっても，ここでは主に，3次元空間における回転を考える．これを考えることにより，物理量をその回転に対する変換性から，スカラー，ベクトル，テンソルなどと分類することができる．これよりももう少し抽象的な量として，スピノールというものが出てくる．回転というものを全体としてながめるとき，数学的には，回転全体が群をなしているので，抽象的な群論の具体的な例として，これを勉強しておくことは重要である．

実用的な面としては，3次元空間におけるベクトル方程式を，これと同等なスピノール方程式に書き直すと，取り扱いが簡単になり，ある種の問題では正確に解けるようになる．

スピノールというのは，ベクトルに比べるとやや抽象的だが，ベクトルは3成分をもつのに対しスピノールは2成分だから，方程式を解くための操作が，慣れればかえって簡単なのである．

これらのことを以下簡単に考えていこう．数学的にあまり厳密なことはいえないし，群論もここでは使わない．群論的な面は上に挙げた山内の著書を参照されたい．

§2. 2次元空間の回転

3次元空間の一般の回転を考えるまえに，まず，2次元回転に慣れておこう．2次元空間の点Pのある直交座標系での座標を(x, y)とする．この座標系と原点0を共有するもう1つの直交座標系で，同じ点Pは座標(x', y')をもつとする．このとき(x', y')と(x, y)とは，よく知られているように

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

で結ばれている．ただし，θとはx'軸のx軸となす角で，**反時計方向を正**にとる．

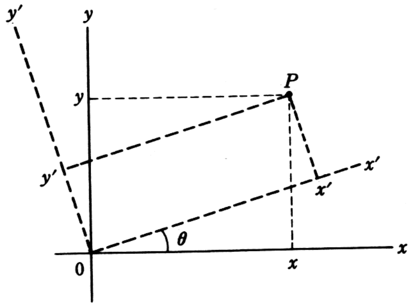


図 4.1

式(2.1)を，3次元に拡張する準備として次のように書き直すと便利である．すなわち式(2.1)を

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

と書く．ここで

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos\theta \qquad & a_{12} &= \sin\theta \\ a_{21} &= -\sin\theta \qquad & a_{22} &= \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

および

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \tag{2.4a}$$

$$x_1' = x' \qquad x_2' = y' \tag{2.4b}$$

である．すぐわかるように

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1 \tag{2.5a}$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \tag{2.5b}$$

$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1 \tag{2.5c}$$

が成り立っている．この3個の式は，1つにまとめて

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \tag{2.6}$$

と書くことができる．ただし，例によって2個の同じ添字が現れたら，それらについて1から2までの和をとるという Einstein の便法を用いた．また容易に確かめられるように

$$\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \tag{2.7}$$

である．

上では同じ点を2個の異なった直交座標系で記述した．次に，ただ1個の直交座標系を考え，この座標系でのベクトル $\boldsymbol{A}_j$ $(j=1, 2)$ に変換

$$\boldsymbol{A}_i' = \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{A}_j \tag{2.8}$$

を施してみる．このときベクトル $\boldsymbol{A}_i'$ は同じ座標系で，図 4.2のように，**時計の回る方向**に角 θ だけ回したベクトル $\boldsymbol{A}'$ に移る．

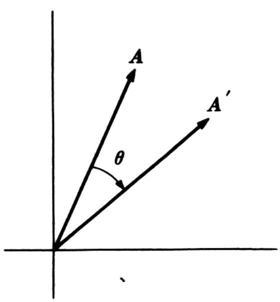


図 4.2

関係式（2.6）と（2.7）とは，回転の特徴で，i，j などを1から n まで走らせると n 次元の回転になる．式（2.6）を満たす量 a_{ij} を行列と考え，これを**直交行列**ということがある．

§3．3次元空間の回転

次に，一般に n 次元の空間の回転を頭において，3次元空間における座標変換を考える．

3次元空間の中の点Pを考え，Descartes 座標系でのこの点の座標を（x_1, x_2, x_3）としよう．この点Pの座標系の原点からの距離の2乗は，いうまでもなく

$$D^2 = x_i x_i \qquad (3.1)$$

で与えられる．そこで，この座標系と原点を共有するもう1つの座標系を考え，同じ点Pのこの新しい座標系での座標を（x_1', x_2', x_3'）とすると，この新しい座標系で，P点と原点との距離の2乗は

$$D'^2 = x_i' x_i' \qquad (3.2)$$

である．

この座標変換で，距離が変わらないという条件 $D' = D$ が成り立つための条件を求めてみよう．このような変換を**等長変換**（isometric transformation）という．この変換が1次変換で

$$x_i' = a_{ij} x_j \qquad (3.3)$$

という形をしていることを仮定し，これを式（3.2）に代入して，式（3.1）と比較すると，条件

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (3.4)$$

が得られる．これはまさに§2の式（2.6）である．いま，a_{ij} を，i 行 j 列とする3行3列の行列を A とすると，式（3.4）は

$$A^{\mathrm{T}} A = I \qquad (3.5)$$

と書くことができる．A^{T} とは A の転置行列で，これは，式（3.5）により A の逆行列 A^{-1} と同じである．つまり

$$A^{\mathrm{T}}=A^{-1} \tag{3.5'}$$

式 (3.5) か式 (3.5′) を満たす行列を**直交行列**または**直交変換**とよぶ．式 (3.5′) から明らかなように式 (3.5) が成り立つと，

$$AA^{\mathrm{T}}=I \tag{3.6}$$

も成り立つ．これは詳しく書くと

$$a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk} \tag{3.7}$$

ということである．

次に，式 (3.5) の両辺の行列式をとると

$$\det(A)\det(A^{\mathrm{T}})=[\det(A)]^2=1 \tag{3.8a}$$

すなわち

$$\det(A)=\pm 1 \tag{3.8b}$$

という条件が得られる．この関係は，式 (3.4) の結論であって，独立な条件ではない．式 (3.8b) の ±1 を

$$\det(A)=\begin{cases} +1 & \text{回転} \\ -1 & \text{反転} \end{cases} \tag{3.9}$$

と分類する．以下，$\det(A)=1$ の回転のほうだけを問題にしよう．

これまでの議論では，実はわれわれが 3 次元空間を考えているということを全然使ってないので，一般に n 次元空間でも成り立つことばかりである．そこで，条件 (3.4) が，一般の n 次元空間で n^2 個の量 a_{ij} をどれだけ制限しているかを調べてみよう．式 (3.4) は，j と k に対して対称な関係だから，独立な制限は

$$(\text{対角項の数})+\frac{1}{2}(\text{非対角項の数})=n+\frac{1}{2}(n\times n-n)=\frac{n(n+1)}{2} \tag{3.10}$$

個ということになる．n^2 個の量 a_{ij} に対して式 (3.10) 個の制限があるわけだから，a_{ij} のうち独立にとれる量は

$$(a_{ij}\ \text{の総数})-(\text{条件の数})=n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \tag{3.11}$$

となる．つまり，独立な a_{ij} の数は

2次元 ($n=2$)	1
3次元 ($n=3$)	3
4次元 ($n=4$)	6

となる．§2の2次元回転では，回転角 θ だけが勝手に与えられる．3次元の回転では3個のパラメーターを与えれば回転が決まるわけで，この3個のパラメーターとしてよく使われるのが，いわゆるEulerの角である．Eulerの角というのは，筆者には抽象的でわかりにくい．それよりも回転の軸（これを与えるのに，2個のパラメーターが必要である）と，その軸の回りの回転角という3個をとるほうが直観的でわかりやすい．これら3個のパラメーターで，a_{ij} を表すことはあとで行う．

§4. Levi-Civita の全反対称テンソル

3次元の回転と取り扱うためには，次のように定義される．Levi-Civitaの全反対称テンソルを導入しておくと大変便利である．

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases} 1 & i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{の偶置換であるとき} \\ -1 & i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の奇置換であるとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.1}$$

この定義により

$$\epsilon_{123}=1 \tag{4.2a}$$

であり，

$$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{ikj}=\epsilon_{jki}=\epsilon_{kij}=\epsilon_{kji} \tag{4.2b}$$

である．また

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{4.3}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}=2!\,\delta_{il} \tag{4.4}$$

が成り立つ．

この記号を使うと，たとえば，2個のベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のベクトル積の i 成分は

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i=\epsilon_{ijk}A_jB_k \tag{4.5}$$

と書かれる．自ら試してほしい．また3個のベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ については，式（4.3）を用いて

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]]_i&=\epsilon_{ijk}A_j(\epsilon_{klm}B_lC_m)\\&=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m\\&=B_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{4.6a}$$

つまり

$$\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{4.6b}$$

という，ベクトル解析における公式が得られる．このほか

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{4.7a}$$

や

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]\cdot[\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}]=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{4.7b}$$

を導くのも容易であろう．

さて，この Levi-Civita の記号を用いると，3次元の空間において，単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の回りの回転 θ は

$$a_{ij}=(\delta_{ij}-e_ie_j)\cos\theta+e_ie_j+\epsilon_{ijk}e_k\sin\theta \tag{4.8}$$

となる．これをみるには，まず，ベクトル $\boldsymbol{e}$ がこの変換で不変であること，つまり $\boldsymbol{e}$ が回転の軸であることを証明する．

$$e_i'=a_{ij}e_j=e_i(e_je_j)+\epsilon_{ijk}e_je_k\sin\theta=e_i \tag{4.9}$$

となり，$\boldsymbol{e}$は不変である．ここで用いたことは，$\boldsymbol{e}$ は単位ベクトルで $e_je_j=1$ ということと，ϵ_{ijk} が全反対称であるということだけである．

次に，$\boldsymbol{e}$ を z 方向にとって，つまり $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$ として式（4.8）を書いてみると

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

となるが，これは正に z 軸の回りに角 θ だけ回転するということである．したがって，式（4.8）は軸 $\boldsymbol{e}$ の回りの回転 θ を表していることになる．

Levi-Civita の全反対称テンソルから，3個の3行3列の行列

$$(T_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \tag{4.11}$$

を定義しておくと，便利なこともある．式 (4.11) をはっきり書き出しておくと，

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

で，全部エルミートである．これらの行列は定義式 (4.11) と関係式 (4.3) から，交換関係

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \tag{4.13}$$

を満たす．（自ら導いてみよ．）さらに，

$$[(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^2]_{ij} = \delta_{ij} - e_i e_j \tag{4.14a}$$

$$[(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^3]_{ij} = [\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}]_{ij} = -i\epsilon_{ijk} e_k \tag{4.14b}$$

を導くこともできる．これらを用いると，式 (4.8) は簡単に

$$a_{ij}(\boldsymbol{e}, \theta) = [e^{i\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}\theta}]_{ij} \tag{4.15}$$

と書くこともできる．右辺の指数は，もちろん展開で定義する．したがって

$$\begin{aligned} [e^{i\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}\theta}]_{ij} &= \delta_{ij} + i\theta[\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}]_{ij} + \frac{1}{2!}(i\theta)^2[(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^2]_{ij} + \frac{1}{3!}(i\theta)^3[(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^3]_{ij} + \cdots \\ &= \delta_{ij} + i\theta(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})_{ij} + \frac{1}{3!}(i\theta)^3(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})_{ij} + \cdots \\ &\qquad + \frac{1}{2!}(i\theta)^2(\delta_{ij} - e_i e_j) + \frac{1}{4!}(i\theta)^4(\delta_{ij} - e_i e_j) + \cdots \\ &= \delta_{ij}\cos\theta - e_i e_j(\cos\theta - 1) + \epsilon_{ijk} e_k \sin\theta \end{aligned} \tag{4.16}$$

となって，式 (4.8) と一致する．

この議論を用いて，3行3列の行列 $A(\boldsymbol{e}, \theta)$ を

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{e}, \theta) &= \exp[i\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}\theta] \\ &= I + i\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}\sin\theta + (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^2(\cos\theta - 1) \end{aligned} \tag{4.17}$$

と書くこともできる．式 (4.8) や式 (4.17) を回転の**ベクトル表現**とよんで

おく．

なお，Levi-Civita の記号と，a_{ij} の組み合わせに関して成り立つ関係式

$$a_{il}\,a_{jm}\,a_{kn}\,\epsilon_{lmn}=\epsilon_{ijk}\det(A) \tag{4.18}$$

も時々使われる．(回転だけ考えるなら，$\det(A)=1$)たとえば，これを用いると

$$a_{ij}(\boldsymbol{e},\theta)T_j=A^{-1}(\boldsymbol{e},\theta)T_iA(\boldsymbol{e},\theta) \tag{4.19}$$

という関係が得られるが，この関係式 (4.19) はあとで使うこともないので，ここでは証明しない．ファイトがあれば，自ら試してみるとよい．式(4.19)のような形に書くことができるということは，あとで，スピノールを導入したときに出てくる関係式と比較すると，なかなかおもしろい．

最後に，式 (4.17) は微分式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}A(\boldsymbol{e},\theta)+\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}A(\boldsymbol{e},\theta)=0 \tag{4.20}$$

を満たしていることを注意しておく．

次にスピノールという量を導入する．

§5. 回転のスピノール表現

今まで，3次元の回転を表現するのに，6個の条件 (3.4) のついた9個の量 a_{ij} を用いてきた．その結果，回転に関する3個の独立なパラメーター($\boldsymbol{e}$ と θ)でそれを表現すると式 (4.8) のようなやや複雑なものになる．たとえば，相異なった軸と角について，回転を2度行うには，3行3列の行列を2個かけ合わせなければならない．このような計算は不可能ではないが，なかなかしんどいものである．

回転を表現するためには，要は，回転軸と回転角の3個を指定すればよいはずで，3行3列の行列でなくても，もっと簡単な表現がありそうなものである．事実，そのようなものは存在する．それがスピノール表現で，回転のスピノール表現は，2行2列の行列であり，計算が3行3列のときよりもうんと簡単になる．

回転軸 $\boldsymbol{e}$ と回転角 θ を含む，次のような複素量を導入しよう．すなわち

$$\alpha \equiv \cos\frac{\theta}{2} + i e_3 \sin\frac{\theta}{2} \tag{5.1a}$$

$$\beta \equiv i(e_i - i e_2)\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.1b}$$

これからすぐわかることは

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{5.2}$$

ということである．α と β を用い

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

という 2 行 2 列の行列を作ると，式 (5.2) のおかげで，この S はユニタリーである．かつ，式 (5.3) の行列式はやはり式 (5.2) のために 1 である

$$\det[S] = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{5.4}$$

ユニタリー性をみるには，式 (5.3) のエルミート共役をまず作る

$$S^\dagger = \begin{bmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

すると

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{bmatrix} = I \tag{5.6}$$

が得られるから

$$S^\dagger = S^{-1} \tag{5.7}$$

つまり，S はユニタリーである．式 (5.4)，(5.7) を満たす行列を，**単模ユニタリー行列** (unimodular unitary matrix) という．S を表すパラメーター α，β を，**Cayley-Klein パラメーター**とよぶ．

S をもう一度，式 (5.1) を使って書き出してみると

$$S = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + ie_3\sin\frac{\theta}{2} & i(e_1 - ie_2)\sin\frac{\theta}{2} \\ i(e_1 + ie_2)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} - ie_3\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}+i\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}e_1\sin\frac{\theta}{2}$$

$$+i\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}e_2\sin\frac{\theta}{2}+i\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}e_3\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=I\cos\frac{\theta}{2}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.8}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$は，Pauli スピン行列

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\qquad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

である．このようなSを与えると，回転は唯一に決まるから，a_{ij} の代わりに，２行２列の単模ユニタリー行列Sで回転を代表させてもよいことになる．では，Sから a_{ij} が作ることができるか？ 距離を不変にするということと，Sはどう関係しているか？

これらの議論をするためには，Pauli スピン行列に関する代数を少々勉強しなければならない．Pauli スピン行列の代数は付録Aにまとめておいたが，ここで必要なことだけ簡単に復習しておくと

(1) Pauli スピン行列（5.9）は交換関係

$$[\sigma_i, \sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{5.10}$$

と，反交換関係

$$\{\sigma_i, \sigma_j\}=2\delta_{ij} \tag{5.11}$$

を満たす．したがって

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{5.12}$$

(2) あるベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ をとると，式（5.12）により

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{5.13a}$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})^2=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{5.13b}$$

(3)
$$[\sigma_i, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}]=2i\epsilon_{ijk}A_j\sigma_k=2i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\sigma})_i \tag{5.14}$$

(4) 任意の２行２列の行列Xは，３個の Pauli スピン行列と単位行列 I で展開できる．すなわち

$$X=\frac{1}{2}Tr[X\sigma_i]\sigma_i+\frac{1}{2}Tr[X]I \tag{5.15}$$

これは，Pauli スピン行列に関する性質

$$Tr[\sigma_i\sigma_j]=2\delta_{ij} \tag{5.16a}$$

$$Tr[\sigma_i]=0 \tag{5.16b}$$

から出てくる．

これらの性質を用いると，たとえば，単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ について

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})^2=1 \tag{5.17a}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})^3=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}) \tag{5.17b}$$

これらの関係が，§4の式（4.14）より格段と簡単であることに注意したい．したがって，式（5.8）は，簡単に

$$S=\exp\left[\frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}\theta\right] \tag{5.18}$$

となる．(右辺を展開して，式 (5.17) を用いると式 (5.8) がすぐ出てくる.)

次に，$S^{-1}\sigma_i S$ を計算してみると

$$\begin{aligned}
S^{-1}\sigma_i S&=\left[I\cos\frac{\theta}{2}-i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})\sin\frac{\theta}{2}\right]\sigma_i\left[I\cos\frac{\theta}{2}+i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})\sin\frac{\theta}{2}\right]\\
&=\cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i+i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}[\sigma_i,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})]+\sin^2\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})\sigma_i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})\\
&=\cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\epsilon_{ijk}e_j\sigma_k+\sin^2\frac{\theta}{2}(2e_i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}-\sigma_i)\\
&=\cos\theta\sigma_i+(1-\cos\theta)e_i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}+\sin\theta\,\epsilon_{ijk}e_k\sigma_j\\
&=[\cos\theta\,\delta_{ik}+(1-\cos\theta)e_ie_k+\sin\theta\cdot\epsilon_{ilk}e_l]\sigma_k\\
&=a_{ik}\sigma_k
\end{aligned} \tag{5.19}$$

という簡単なものになる．実は，a_{ij} が先に与えられたとき，式 (5.19) という関係によって S を定義するのが普通だが，ここでは，ヘソ曲りに反対の道をたどったわけである．なお，式（5.19）と式（4.19）を比べて見よ．

さて，式（5.19）という関係があると，これは先に述べた第1の疑問“S から a_{ij} が作れるか”ということに対する解答が直ちに得られる．それには，

式 (5.19) に σ_j をかけて，トレース（対角和）をとると，式 (5.16a) により，左辺は

$$Tr[\sigma_j S^{-1} \sigma_i S] = Tr[\sigma_i S \sigma_j S^{-1}]$$

右辺は

$$a_{ik} Tr[\sigma_j \sigma_k] = 2a_{ik}\delta_{jk} = 2a_{ij}$$

したがって，

$$a_{ij} = \frac{1}{2} Tr[\sigma_i S \sigma_j S^{-1}] \tag{5.20}$$

となる．つまり S が与えられると，右辺の演算をすることによって，a_{ij} が得られるわけである．

次に，第 2 の問題“距離を不変にするということと，S はどのように関係しているのか”に答えるためには，やはり式 (5.19) を利用する．式 (5.19) を S と S^{-1} ではさむと

$$\sigma_i = a_{ik} S \sigma_k S^{-1} \tag{5.21}$$

これに，a_{ij} をかけて，i について加えると，条件 (3.4) により

$$\sigma_i a_{ij} = S \sigma_j S^{-1} \tag{5.22}$$

となる．次に x_j をかけて j について加え合わせると

$$\begin{aligned} \sigma_i a_{ij} x_j &= \sigma_i x_j' \\ &= S \sigma_j x_j S^{-1} \end{aligned} \tag{5.23}$$

前の距離の 2 乗は，式 (5.16a) により

$$D'^2 = x_i' x_i' = \frac{1}{2} Tr[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x}')^2]$$

と書くことができるが，この式の右辺に式 (5.23) を代入すると

$$D'^2 = \frac{1}{2} Tr[S(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x})^2 S^{-1}] = \frac{1}{2} Tr[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x})^2] = D^2 \tag{5.24}$$

であることがわかる．これで証明終わりである．

念のために書いておくと，式 (5.23) の式は

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{bmatrix} \tag{5.25a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_3' & x_1'-ix_2' \\ x_1'+ix_2' & -x_3' \end{bmatrix} \tag{5.25b}$$

で，これらが，単模ユニタリー変換Sで結ばれているということである．

このユニタリー変換を使うと，たとえば，回転を2回続けて行う場合，

$$\begin{aligned}
&S(\boldsymbol{e}^{(2)},\theta^{(2)})S(\boldsymbol{e}^{(1)},\theta^{(1)})\\
&=\left[\cos\frac{\theta^{(2)}}{2}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}^{(2)}\sin\frac{\theta^{(2)}}{2}\right]\left[\cos\frac{\theta^{(1)}}{2}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}^{(1)}\sin\frac{\theta^{(1)}}{2}\right]\\
&=\cos\frac{\theta^{(2)}}{2}\cos\frac{\theta^{(1)}}{2}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{e}^{(1)}\sin\frac{\theta^{(1)}}{2}\cos\frac{\theta^{(2)}}{2}+\boldsymbol{e}^{(2)}\sin\frac{\theta^{(2)}}{2}\cos\frac{\theta^{(1)}}{2}\right)\\
&\qquad-((\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{e}^{(2)})+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{e}^{(2)}\times\boldsymbol{e}^{(1)}))\sin\frac{\theta^{(1)}}{2}\sin\frac{\theta^{(2)}}{2}\\
&=\left[\cos\frac{\theta^{(2)}}{2}\cos\frac{\theta^{(1)}}{2}-(\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{e}^{(2)})\sin\frac{\theta^{(1)}}{2}\sin\frac{\theta^{(2)}}{2}\right]\\
&\quad+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\boldsymbol{e}^{(1)}\sin\frac{\theta^{(1)}}{2}\cos\frac{\theta^{(2)}}{2}+\boldsymbol{e}^{(2)}\sin\frac{\theta^{(2)}}{2}\cos\frac{\theta^{(1)}}{2}\right.\\
&\qquad\left.-(\boldsymbol{e}^{(2)}\times\boldsymbol{e}^{(1)})\sin\frac{\theta^{(1)}}{2}\sin\frac{\theta^{(2)}}{2}\right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

のように，比較的簡単になる．$a_{ij}(\boldsymbol{e}^{(2)},\theta^{(2)})a_{jk}(\boldsymbol{e}^{(1)},\theta^{(1)})$ の計算をやってみて，その複雑さを納得されるとよい．

最後に，直交行列と単模ユニタリー行列について2つだけ注意しておく．任意の2つの直交行列をかけ合わせると，結果はまた直交行列になる．同様に，任意の2つの単模ユニタリー行列をかけ合わせても，やはり単模ユニタリーという性質は保たれる．証明はやさしい．これが回転群論の基礎になる．

また，式（5.8）を用いると，$S(\boldsymbol{e},\theta)$ に関する微分方程式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S(\boldsymbol{e},\theta)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})S(\boldsymbol{e}\cdot\theta)=0 \tag{5.27}$$

が得られる．これが，直交行列に対する微分方程式（4.20）に対応するものである．

§6. ベクトル，テンソル，スピノールなど

今まで，軸 $\boldsymbol{e}$ の回りの回転 θ を表現するのに，

$$x_i'=a_{ij}(\boldsymbol{e},\theta)x_j \tag{6.1}$$

で定義される a_{ij}，すなわちベクトル表現と，

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}'=S(\boldsymbol{e},\theta)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}S^{-1}(\boldsymbol{e},\theta) \tag{6.2}$$

で定義されるスピノール表現 $S(\boldsymbol{e},\theta)$ とを考えてきた．これは，互いに式 (5.20) で結ばれていて，実は同等なものである．

これらを用いると，物理的な場を次のように分類することができる．

(1) スカラー場

力学に出てくるポテンシャルのように，1成分の場で，座標系を式 (6.1) のように変換したとき

$$\phi(\boldsymbol{x})\longrightarrow\phi'(\boldsymbol{x}')=\phi(\boldsymbol{x}) \tag{6.3}$$

となるものを，**スカラー場**という．

(2) ベクトル場

電磁気学に出てくる電場や磁場のように，3成分をもち，式 (6.1) に対して

$$V_i(\boldsymbol{x})\longrightarrow V_i'(\boldsymbol{x}')=a_{ij}V_j(\boldsymbol{x}) \tag{6.4}$$

と変換する量を**ベクトル場**とよぶ．空間反転はここでは考えないから，電場も磁場も同様に式 (6.4) のように変換する．

(3) テンソル場

物質の中の歪みや圧力などのように，一般に9個の成分をもち，式 (6.1) に対して

$$T_{ij}(\boldsymbol{x})\longrightarrow T_{ij}'(\boldsymbol{x}')=a_{ik}a_{jl}T_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{6.5}$$

と変換するものを，(2階の)**テンソル場**という．もっと高い階数のテンソル場も考えられる．

(4) スピノール場

2個の成分をもつ場 $\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$ ($\alpha=1,2$) で，それが式 (6.2) に対して

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \psi_\alpha'(\boldsymbol{x}') = S_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x}) \tag{6.6}$$

と変換するとき，ψ_α を**スピノール場**という．量子力学で，スピン $\dfrac{1}{2}$ をもった粒子の場を表すとき，これが用いられる．このほか，1，2をとるスピノールの足を2個もつ場とか，スピノールの足とベクトルの足を両方もった場とか，いろいろなものが考えられる．

おもしろいのは，スピノール場 $\psi(\boldsymbol{x})$ があるとき，

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\psi(\boldsymbol{x}) \tag{6.7}$$

というものを作ると（$\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\psi(\boldsymbol{x}) = \psi_\alpha{}^*(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x})$ の意味），これは，ベクトルとして変換する．なぜなら，式（5.22）により

$$\begin{aligned}\psi^{\dagger\prime}(\boldsymbol{x}')\sigma_i\psi'(\boldsymbol{x}') &= \psi^\dagger(\boldsymbol{x})S^{-1}\sigma_i S\psi(\boldsymbol{x}) \\ &= a_{ij}\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\sigma_j\psi(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{6.8}$$

だからである．つまり，スピノールからベクトルが作られる．スピノールからスカラーを作るのも容易であろう．

この逆は可能だろうか？ つまり，スカラーやベクトルから，スピノールを作ることは可能であろうか．答えはイエスだが，事は少々複雑になるから，ここでは議論しないが，このようなことが可能であるということは頭においておいてもよいと思う．

スピノールがスピン $\dfrac{1}{2}$ の粒子の場なら，スカラーやベクトルの場のスピンは何だろうか？ §4で回転を表現するのに3個の行列 $\boldsymbol{T}$ というものを導入した．この $\boldsymbol{T}$ は，ちょうど，角運動量の交換関係式（4.13）を満たしている．なんだかスピンと関係しているらしい．次のような計算をやってみよう．

$$T_1{}^2 + T_2{}^2 + T_3{}^2 = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

量子力学を思い出すと，角運動量の2乗は固有値 $\mathrm{s}(\mathrm{s}+1)$ をもつ．式(6.9)の場合は

$$\mathrm{s}(\mathrm{s}+1) = 2 \qquad \therefore \quad \mathrm{s} = 1 \tag{6.10}$$

この場合は，スピン１に関係している．スピンsの第３成分の固有値の数は

$$2s+1 \tag{6.11}$$

であるから，s=1 に対しては2s+1=3 となり，ちょうどベクトル成分の数である．

［2s+1 法則］

以上のことから，2s+1 法則を用いると，いろいろな場に属するスピンの数は，表4.1のようになる．

表4.1

2s+1	場	s
1	スカラー場	0
3	ベクトル場	1
3	反対称テンソル場	1
5	トレース０の対称テンソル場	2
2	スピノール場	$\frac{1}{2}$

最後に，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}$ とSの２，３の例を挙げておく．

(1)
$$\boldsymbol{e}=(\sin\gamma\cos\phi,\ \sin\gamma\sin\phi,\ \cos\gamma)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}&=\sigma_1\sin\gamma\cos\phi+\sigma_2\sin\gamma\sin\phi+\sigma_3\cos\gamma\\&=\begin{bmatrix}\cos\gamma & e^{-i\phi}\sin\gamma\\ e^{i\phi}\sin\gamma & -\cos\gamma\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\therefore\quad S(\boldsymbol{e},\theta)=\cos\frac{\theta}{2}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}+i\cos\gamma\sin\frac{\theta}{2} & ie^{-i\phi}\sin\gamma\sin\frac{\theta}{2}\\ ie^{i\phi}\sin\gamma\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}-i\cos\gamma\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} \tag{6.13}$$

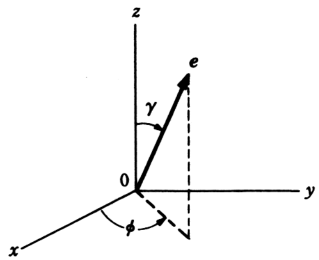


図 4.3

(2)

$$e=(0,0,1)$$

$$\therefore \quad \phi=\gamma=0$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}=\sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$S(\boldsymbol{e},\theta)=\begin{bmatrix}e^{i\frac{1}{2}\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{1}{2}\theta}\end{bmatrix} \tag{6.15}$$

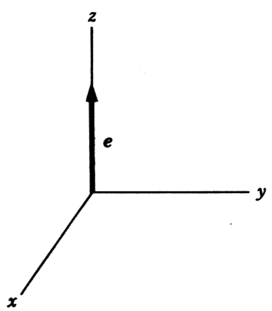


図 4.4

(3)

$$\boldsymbol{e}=(\cos\phi,\sin\phi,0)$$

$$\gamma=\frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}0 & e^{-i\phi}\\ e^{i\phi} & 0\end{bmatrix} \tag{6.16}$$

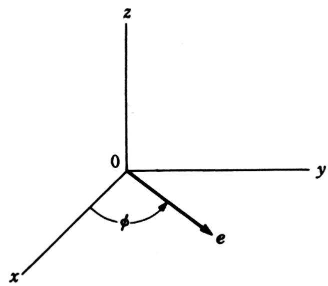


図 4.5

$$S(\boldsymbol{e},\theta)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ ie^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} \tag{6.17}$$

§7. 回転中の座標系

次に回転中の座標系を考えよう．座標系の運動は，いわゆる“みかけの力”を生ずるが，以下，特に，回転中の座標系を問題にする．ある座標系から，それに対してある軸の回りを，ある速度（一定でなくてもよい）で回転する座標系に移すには，a_{ij} として時間に依存するものを考えればよい．時間に依存する $a_{ij}(t)$ でも，それが回転であるかぎり，直交条件（2.6）が成り立っていなければならない．

一般に時間に依存する軸方向 $\boldsymbol{e}(t)$ の回りを，時間に依存する角 $\theta(t)$ だけ回転する座標系は，もとのものと

$$a_{ij}(t)=(\delta_{ij}-e_i(t)e_j(t))\cos\theta(t)+e_i(t)e_j(t)+\epsilon_{ijk}e_k(t)\sin\theta(t) \tag{7.1}$$

で結ばれていると考えてよい．特に，$\boldsymbol{e}$ が一定で，$\theta(t)$ が一定の角速度 ω で回転している場合には，式（7.1）は簡単になって

$$a_{ij}(t)=(\delta_{ij}-e_ie_j)\cos\omega t+e_ie_j+\epsilon_{ijk}e_k\sin\omega t \tag{7.2}$$

で与えられる．

以下，しばらく，行列の記号を用いることにする．ある座標系における，点粒子の座標を $x(t)$

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

と書き，これに対して回転している座標系での同一点粒子の座標を

$$x'(t)=\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}$$

と書くと，両者は（7.1）の行列を用いて

$$x'(t)=A(t)x(t) \tag{7.3}$$

で結ばれる．いま，**角速度行列**を

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)\equiv-\Omega(t) \tag{7.4}$$

で定義すると，式（7.3）より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}&=A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}x\\ &=A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}Ax\\ &=A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\Omega x' \end{aligned} \tag{7.5}$$

となる．すなわち

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\Omega(t)\right]x'(t)=A(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.5'}$$

これが，両座標系における同一粒子の速度の関係を与える．Aの時間依存性のために，$\Omega(t)$という項が現われる点に注意されたい．次に式（7.5）をもう一度時間微分すると，加速度の関係が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}&=A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}+\Omega x'\right]-\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}x'-\Omega\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\\ &=A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\Omega\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}-\left[\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}+\Omega\Omega\right]x' \end{aligned} \tag{7.6}$$

すなわち，Aの時間依存性から，２項だけ余分な項が出てきた．ここで

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2}A^{-1}=-\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}+\Omega\Omega$$

であることに注意したい．これは，式 (7.4) の帰結である．式 (7.6) を書き直すと

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\Omega(t)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\Omega(t)\right]x'(t)=A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \tag{7.6'}$$

と書くことができる．

[定 理]

$$\Omega(t)\equiv-\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)=A(t)\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.7}$$

は，反対称行列である．

証 明：行列を逆にすると，直交変換に対しては

$$\Omega^T(t)=-\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}\right]^T$$

$$=-(A^{-1})^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^T$$

$$=-A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}=-\Omega(t)$$

となる．したがって $\Omega(t)$ は反対称行列である．（証明終わり）

なお，同様のことが，

$$\hat{\Omega}(t)\equiv\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t}A=-A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=A^{-1}\Omega A \tag{7.8}$$

についても成り立つ．

ここまでは，全く一般的な回転の話である．次に固定した軸 $\boldsymbol{e}$ の回りを，一定の角速度 ω で回転している座標系を考える．すると式 (7.2) から

$$\Omega_{ij}=-\omega\epsilon_{ijk}e_k=-\epsilon_{ijk}\omega_k$$

となって，これはもう時間によらない．ただし

$$\omega_k\equiv e_k\omega \tag{7.9'}$$

また

$$[\Omega x']_i=[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}']_i \tag{7.10}$$

である．式（7.6）によると，この場合

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i'}{\mathrm{d}t^2}+2\left[\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t}\right]_i+[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}')]_i=a_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x_j}{\mathrm{d}t^2} \tag{7.11}$$

である．左辺は，回転中の座標系における加速と，第2項の Coliolis の力による項と，最後の遠心力の項から成り立っている．これらの和が，座標系の回転を無視した加速度に等しいということである．速度は，いうまでもなく

$$\frac{\mathrm{d}x_i'}{\mathrm{d}t}+[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}']_i=a_{ij}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \tag{7.12}$$

である．物理的意味は明らかであろう．

§8．一般の場合の角速度行列

一般の場合の角速度行列を求めるのは，少々やっかいだが，元気を出して計算してみると：式（7.1）から

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_{ji}}{\mathrm{d}t}=&-\dot{\theta}\{(\delta_{ji}-e_je_i)\sin\theta-\epsilon_{jim}e_m\cos\theta\}\\&+\epsilon_{jim}\dot{e}_m\sin\theta-(e_j\dot{e}_i+\dot{e}_je_i)(\cos\theta-1)\end{aligned} \tag{8.1}$$

そして定義（7.4）により

$$\Omega_{jk}(t)=-\left[\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)\right]_{jk}=-\frac{\mathrm{d}a_{ji}(t)}{\mathrm{d}t}a_{ki}(t) \tag{8.2}$$

を

$$a_{ki}(t)=\delta_{ki}\cos\theta+e_ke_i(1-\cos\theta)+\epsilon_{kil}e_l\sin\theta \tag{8.3}$$

を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\Omega_{jk}(t)=&-\epsilon_{jkl}\{e_l\dot{\theta}+\dot{e}_l\sin\theta\cos\theta\}+(e_j\dot{e}_k-\dot{e}_je_k)(1-\cos\theta)\\&+\{e_j(\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}})_k-e_k(\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}})_j\}\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}=&-\epsilon_{jkl}\{e_l\dot{\theta}+\dot{e}_l\sin\theta\cos\theta-(\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}})_l(1-\cos\theta)\\&-(\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}}))_l\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{8.5}$$

そこで

$$\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}})=-\dot{\boldsymbol{e}}$$

を用いると，結局

$$\Omega_{jk}(t)=-\epsilon_{jkl}\omega_l(t) \tag{8.6}$$

となる．ただし

$$\omega_l(t)\equiv e_l(t)\dot{\theta}(t)+\dot{e}_l(t)\sin\theta(t)-\{\boldsymbol{e}(t)\times\dot{\boldsymbol{e}}(t)\}_l\{1-\cos\theta(t)\} \tag{8.7}$$

である．$\boldsymbol{e}$ は単位ベクトルだから，$\boldsymbol{e}$，$\dot{\boldsymbol{e}}$ と $\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{e}}$ とは，右手系を作る互いに直角なベクトル系である．よって定義 (8.2) により，$A(t)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}+\Omega(t)A(t)=0 \tag{8.8}$$

を満たすということになる．

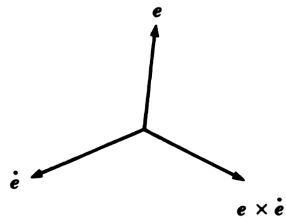


図 4.6

では，$\Omega(t)$ が与えられたとき，微分方程式 (8.8) の解は式 (8.3) に限られるかというと，そうはいかない．微分方程式 (8.8) を解くには，$A(t)$ の初期条件が要るからである．初期条件を入れるには式(8.8)の右から $A^{-1}(t_0)$ をかけ

$$R_0(t,t_0)\equiv A(t)A^{-1}(t_0) \tag{8.9}$$

とおくと，初期条件は

$$R_0(t_0,t_0)=A(t_0)A^{-1}(t_0)=1 \tag{8.10}$$

となるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_0(t,t_0)+\Omega(t)R_0(t,t_0)=0 \tag{8.11}$$

を解くと，

$$A(t)=R(t,t_0)A(t_0) \tag{8.12}$$

が必要な解となる．この $R(t,t_0)$ は，III章§6で考察した $G_0(t,t_0)$ にあたる．これから式 (8.11) の Green 関数を作るのは，容易であろう．

式（8.3）を用いて，量（8.9）を計算するのはなかなかしんどい．この計算をあとまわしにし，ここでスピノール表現を利用しよう．

[スピノール表現]

方程式（8.8）と等価なものとしてスピノール方程式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)+\beta(t)S(t)=0 \tag{8.13}$$

を導入する．ただし

$$\beta(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}(t) \tag{8.14}$$

で，この $\boldsymbol{\omega}(t)$ は，式（8.7）で与えられる．すると

$$S(t)=\cos\frac{1}{2}\theta(t)+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}(t)\sin\frac{1}{2}\theta(t) \tag{8.15}$$

はもちろん式（8.13）の解である．

一般の解を求めるには，式（8.9）と同じく

$$S(t,\ t_0)=S(t)S^{-1}(t_0) \tag{8.16}$$

を定義するとよい．この量は初期条件

$$S(t_0,\ t_0)=I \tag{8.17}$$

を満たすから，式（8.13）の一般解は式（8.16）から容易に作ることができる．さらに，式（5.20）と同様の考察から，$S(t,\ t_0)$ から $R(t_1,\ t_0)$ を

$$R_{ij}(t,\ t_0)=\frac{1}{2}Tr[\sigma_i S(t,\ t_0)\sigma_j S^{-1}(t,\ t_0)] \tag{8.18}$$

によって求めることができる．

ここでついでに式（8.15）から式（8.16）を計算してみると，Rのときほどやっかいではなく，

$$\begin{aligned}
&S(t,\ t_0)=S(t)S^{-1}(t_0)\\
&=\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0+(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_0)\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta_0\\
&+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left\{\boldsymbol{e}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0-\boldsymbol{e}_0\sin\frac{1}{2}\theta_0\cos\frac{1}{2}\theta+(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_0)\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta_0\right\}
\end{aligned}$$

ただし

$$\left.\begin{array}{ll}\theta\equiv\theta(t), & \theta_0\equiv\theta(t_0)\\ \boldsymbol{e}\equiv\boldsymbol{e}(t), & \boldsymbol{e}_0\equiv\boldsymbol{e}(t_0)\end{array}\right\} \tag{8.20}$$

と略記した。

式 (8.19) から式 (8.18) を用いて R_{ij} を作ると，(この計算は自らやってほしい) 次のようになる。

$$R_{ij}(t, t_0)=\delta_{ij}(C^2-\boldsymbol{D}^2)+2D_iD_j+\epsilon_{ijk}D_kC \tag{8.21}$$

ただし

$$C\equiv\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0+(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_0)\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta_0$$

$$\boldsymbol{D}\equiv\boldsymbol{e}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0-\boldsymbol{e}_0\sin\frac{1}{2}\theta_0\cos\frac{1}{2}\theta$$

$$+(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_0)\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta_0 \tag{8.22}$$

上の計算では

$$Tr[\sigma_i]=0 \tag{8.23a}$$

$$Tr[\sigma_i\sigma_j]=2\delta_{ij} \tag{8.23b}$$

$$Tr[\sigma_i\sigma_j\sigma_k]=2i\epsilon_{ijk} \tag{8.23c}$$

$$Tr[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l]=2(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{8.23d}$$

を用いた。S のユニタリー性から，上の C，$\boldsymbol{D}$ は

$$C^2+\boldsymbol{D}^2=1 \tag{8.24}$$

を満たしている。

§9. 応 用 問 題

今までに考察してきた，回転の技巧が使える例として

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t, t_0)+\{B_0+B(t)\}R(t, t_0)=0 \tag{9.1}$$

の形の微分方程式を考える。ただし，R，B_0，$B(t)$ は 3 行 3 列の行列で，B_0 と $B(t)$ が与えられているとする。これは，III章で考えた微分方程式を 3 行 3 列に拡張したものである。なお B_0 と $B(t)$ は**反対称行列**で，R が初期条

件

$$R(t_0, t_0)=I \quad (3\text{行}3\text{列}) \tag{9.2}$$

を満たしているとしよう．

まず，時間に依存しない反対称行列 B_0 を表面から消すのは容易である．それには

$$R(t-t_0)=\mathrm{e}^{-B_0(t-t_0)}R_1(t-t_0) \tag{9.3}$$

とおいて，式 (9.1) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}&=-B_0\mathrm{e}^{-B_0(t-t_0)}R_1+\mathrm{e}^{-B_0(t-t_0)}\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}\\&=\{B_0+B(t)\}\mathrm{e}^{-B_0(t-t_0)}R_1\end{aligned} \tag{9.4}$$

左から $\mathrm{e}^{B_0(t-t_0)}$ をかけると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_1(t, t_0)+\hat{B}(t)R_1(t, t_0)=0 \tag{9.5}$$

となる．ただし

$$\hat{B}(t)\equiv\mathrm{e}^{B_0(t-t_0)}B(t)\mathrm{e}^{-B_0(t-t_0)} \tag{9.6}$$

とした．B_0 と $B(t)$ とは，行列であって，一般には交換可能でないから，式 (9.6) の指数関数はこのままにしておかなければならない．$B(t)$ と B_0 が反対称なので，$\hat{B}(t)$ も反対称である．(証明はやさしい．)

さて，R から R_1 への変換 (9.3) は，1つの回転である．それをみるためには，まず

$$B_{0k}=-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(B_0)_{ij} \tag{9.7}$$

で，定数ベクトルを定義する．次に，Levi-Civita の全反対称テンソルの性質，式 (4.4) および (4.11) で導入した3個の3行3列の行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて式 (9.7) を逆に解くと

$$B_0=-i\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{B}_0 \tag{9.7'}$$

となる．したがって，

$$\mathrm{e}^{-B_0(t-t_0)}=\mathrm{e}^{i\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{B}_0(t-t_0)} \tag{9.7''}$$

である．これは，式 (4.15) と比較するとすぐわかるように，軸 $\boldsymbol{B}_0$ の回り

に，角速度 $|\boldsymbol{B}_0|$ で回っている一様な回転である．

このように，式(9.1)の形の微分方程式があると，定数反対称行列の項 B_0 はいつでも角速度 $|\boldsymbol{B}_0|$ の一様な回転座標系へ移ることによって消してしまうことができる．この変換はユニタリー変換である．

さて，方程式 (9.5) に戻る．これは $\hat{B}(t)$ が時間に依存しているので，その解を指数関数にまとめることはできないが，$\hat{B}(t)$ の級数展開の形で解が与えられる．そのためにまず式 (9.5) を

$$R_1(t,\,t_0)=I-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,\hat{B}(t_1)\,R_1(t_1,\,t_0) \tag{9.8}$$

という積分方程式に書き直す．これを逐次的に解いていくと

$$\begin{aligned}R_1(t,\,t_0)&=I-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,\hat{B}(t_1)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\,\hat{B}(t_1)\,\hat{B}(t_2)\,R_1(t_2,\,t_0)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\,\hat{B}(t_1)\,\hat{B}(t_2)\cdots\hat{B}(t_n)\end{aligned} \tag{9.9}$$

という無限級数の形に書くことができる．$\hat{B}$ は 3 行 3 列の行列だから，式 (9.9) の被積分項の中で，$\hat{B}(t_1)\cdots\hat{B}(t_n)$ の順序を勝手に変えられない．したがって，一般の $\hat{B}(t)$ に対して式 (9.9) を計算していくのはたいへんなことである．

そこで式 (9.5) の方程式を直接解こうとしないで，スピノールに変換して取り扱ったら，計算が少々簡単になる．このことはあとで考える．

次に，非同次の方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_i(t)+\hat{B}_{ij}(t)M_j(t)=A_i(t) \tag{9.10}$$

について簡単に考えておこう．B_{ij} は 3 行 3 列の行列，$A_i(t)$ は与えられたベクトルとする．この方程式 (9.10) は，例によって Green 関数によって取り扱うことができる．話は，III章の微分方程式と全く同じである．式 (9.10) に対して，もし，同次方程式 (9.5) が解けたとすると，式 (9.10) の解は，

$$M(t)=R_1(t,\,t_0)M(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\mathrm{R}_1(t,\,t')\,A(t') \tag{9.11}$$

となる．これを試すには，左から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\hat{B}(t) \tag{9.12}$$

をかけて，式（9.5）を用いさえすればよい．初期値が $M(t_0)$ になることも，R_1 の初期条件

$$R_1(t_0,\ t_0)=I \tag{9.13}$$

を用いれば，すぐわかる．

§ 10．磁場の中での磁気双極子の運動

磁気能率 $\boldsymbol{M}(t)$ をもった磁気双極子に，磁場 $\boldsymbol{B}(t)$ をかけると，それにはトルク $\boldsymbol{M}(t)\times\boldsymbol{B}(t)$ が働く．したがって，その時間的変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)+\gamma\boldsymbol{B}(t)\times\boldsymbol{M}(t)=0 \tag{10.1}$$

に従うというのが，Bloch 方程式である．ここに γ は，ある定数である．この Bloch 方程式を取り扱うことを考えよう．

まず，この方程式が，§ 9 で考えた方程式の形になることを確認しよう．それには，式（10.1）のベクトル積を Levi-Civita の記号で書いてみると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_i(t)+\gamma\epsilon_{ijk}B_j(t)M_k(t)=0 \tag{10.1'}$$

となることがわかる．反対称の行列

$$-\gamma\epsilon_{ijk}B_k(t)\equiv B_{ij}(t) \tag{10.2}$$

を定義すると，式（10.1′）は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_i(t)+B_{ij}(t)M_j(t)=0 \tag{10.1''}$$

となるから，一般の場合には，式 (9.9) のような無限級数の形で解が得られる．ただし前にも注意したように，この無限級数の各項を求めることも，無限級数の全項を加え合わせることも，並大抵のことでは実行できない．

ここでは，式（10.1）を，それと等価なスピノール方程式に変換して話を進める．1 つの 2 成分スピノール $\psi(t)$ を導入し，方程式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+\beta(t)\psi(t)=0 \tag{10.3}$$

を作る．ただし

$$\beta(t)\equiv\frac{1}{2}\gamma\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}(t) \tag{10.4a}$$

$$=\frac{1}{2}\gamma\begin{bmatrix} B_3(t) & B_1(t)-iB_2(t) \\ B_1(t)+iB_2(t) & -B_3(t) \end{bmatrix} \tag{10.4b}$$

であって，$\boldsymbol{\sigma}$ は3個の Pauli スピン (5.9) で，交換関係 (5.10) と反交換関係 (5.11) を満たす．

そこで，まず式 (10.3) の解が知れると，式 (10.1) の解が作られることを示す．まず式 (10.3) の左から $\psi^\dagger(t)\sigma_i$ をかけると

$$i\psi^\dagger(t)\sigma_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+\psi^\dagger(t)\sigma_i\beta(t)\psi(t)=0 \tag{10.5a}$$

一方，式 (10.3) のエルミート共役をとって，右から σ_i，$\psi(t)$ をかけると

$$-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi^\dagger(t)\sigma_i\psi(t)+\psi^\dagger(t)\beta(t)\sigma_i\psi(t)=0 \tag{10.5b}$$

式 (10.5a) から式 (10.5b) を引くと，σ の交換関係 (5.10) のために

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^\dagger(t)\sigma_i\psi(t))+i\gamma\epsilon_{ijk}\psi^\dagger(t)B_j(t)\sigma_k\psi(t)=0 \tag{10.6a}$$

すなわち，ベクトル記号で

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^\dagger(t)\boldsymbol{\sigma}\psi(t))+\gamma\boldsymbol{B}(t)\times(\psi^\dagger(t)\boldsymbol{\sigma}\psi(t))=0 \tag{10.6b}$$

となる．これは式 (10.1) と全く同形だから

$$\boldsymbol{M}(t)=\psi^\dagger(t)\boldsymbol{\sigma}\psi(t) \tag{10.7}$$

ととればよいことがわかる．2成分の方程式 (10.3) のほうが，数学的に取り扱いやすいのである．物理的には $\psi(t)$ は抽象的でわかりにくいかもしれないが，この点は慣れるしかない．

注 意

上では，天下りに式 (10.3) を与え，それから式 (10.7) とすればよいことを示したが，実は式 (10.6) を得るためだけなら，式 (10.3) よりもう少

し一般的な式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+\{\beta(t)+\eta(t)\}\psi(t)=0 \tag{10.8}$$

をとってもよい．ただし，$\eta(t)$ は Pauli スピン行列を含まないとする．すると，上の式（10.6）に至る計算はすべて成立し，やはり式（10.6）に到達する．この不定性 $\eta(t)$ は，あとで利用するかもしれないが，当分のあいだ 0 とおいておく．

そこで，スピノール方程式（10.3）に戻る．式（10.3）とそのエルミート共役式を組み合わせると

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^\dagger(t)\psi(t))=0 \tag{10.9}$$

が得られるから，$\psi^\dagger(t)\psi(t)$ という量は保存する．したがって，$\psi(t)$ にユニタリー変換をほどこすのが有用な技巧であることがわかる．たとえば，$\psi(t)$ にユニタリー変換 $S(t,t_0)$ をほどこして，$t=t_0$ におけるスピノールに直すことができる．というのは

$$\psi(t)\equiv S(t,t_0)\psi(t_0) \tag{10.10}$$

とすると，S のユニタリー性によって

$$\begin{aligned}(\psi^\dagger(t)\psi(t))&=(\psi^\dagger(t_0)S^\dagger(t,t_0)S(t,t_0)\psi(t_0))\\&=\psi^\dagger(t_0)\psi(t_0)\end{aligned} \tag{10.11}$$

となり，$\psi^\dagger(t)\psi(t)$ が時間によらないことは，一目瞭然だからである．

いま，$\psi(t)$ に，ユニタリー変換 $S_n(t)$ をほどこし

$$\psi(t)=S_n(t)\psi_n(t) \tag{10.12}$$

として，式（10.3）に代入すると

$$\begin{aligned}i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)&=i\frac{\mathrm{d}S_n(t)}{\mathrm{d}t}\psi_n(t)+S_n(t)i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_n(t)\\&=-\beta(t)S_n(t)\psi_n(t)\end{aligned} \tag{10.13}$$

したがって，$\psi_n(t)$ は

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_n(t)+\left\{iS_n^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_n(t)+S_n^{-1}(t)\beta(t)S_n(t)\right\}\psi_n(t)=0 \tag{10.14}$$

を満たさなければならない．$S_n(t)$ を適当に選ぶと，{ } の中が簡単になることがある．

［例 1］

$$\beta(t)=\frac{1}{2}\gamma\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}_0\equiv\beta_0 \tag{10.15}$$

の場合を考えると

$$S_n(t)=\cos\frac{1}{2}\omega_0 t+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0\sin\frac{1}{2}\omega_0 t \tag{10.16}$$

$$\boldsymbol{e}_0\equiv\boldsymbol{B}_0/|\boldsymbol{B}_0| \tag{10.17a}$$

$$\omega_0\equiv r|\boldsymbol{B}_0| \tag{10.17b}$$

ととったとき，明らかに（式（5.27）を見よ）

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_n(t)+\beta_0 S_n(t)=0 \tag{10.18}$$

となり，$\{\cdots\}=0$，すなわち，$\psi_n(t)$ は時間によらないスピノールとなる．$\boldsymbol{M}(t)$ を計算するには式（10.7）を使う．

$$M_i(t)=\psi^{\dagger}(t)\sigma_i\psi(t)=\psi_n{}^{\dagger}(0)S_n{}^{-1}\sigma_i S_n\psi_n(0) \tag{10.19}$$

$$\begin{aligned}
&S_n{}^{-1}\sigma_i S_n\\
&=\left(\cos\frac{1}{2}\omega_0 t-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0\sin\frac{1}{2}\omega_0 t\right)\sigma_i\left(\cos\frac{1}{2}\omega_0 t+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0\sin\frac{1}{2}\omega_0 t\right)\\
&=\sigma_i\cos^2\frac{1}{2}\omega_0 t+i[\sigma_i,\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0]\sin\frac{1}{2}\omega_0 t\cos\frac{1}{2}\omega_0 t+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0\sigma_i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0)\sin^2\frac{1}{2}\omega_0 t\\
&=\sigma_i\left\{\cos^2\frac{1}{2}\omega_0 t-\sin^2\frac{1}{2}\omega_0 t\right\}2\epsilon_{ikl}\sigma_l e_{0k}\sin\frac{1}{2}\omega_0 t\cos\frac{1}{2}\omega_0 t\\
&+2e_i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0)\sin^2\frac{1}{2}\omega_0 t
\end{aligned} \tag{10.20}$$

これを式（10.19）の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
M_i(t)=&M_i(0)\cos\omega_0 t+(\boldsymbol{e}_0\times\boldsymbol{M}(0))_i\sin\omega_0 t\\
&+e_{0i}(\boldsymbol{M}(0)\cdot\boldsymbol{e}_0)(1-\cos\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{10.21}$$

となる．ただし

$$M_i(0)\equiv\psi_n{}^{\dagger}(0)\sigma_i\psi_n(0) \tag{10.22}$$

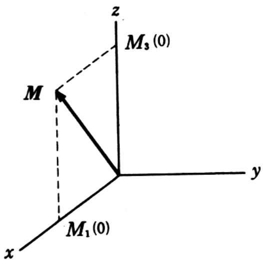


図 4.7

とおいた．式 (10.21) は $\boldsymbol{M}(t)$ が，$\boldsymbol{e}_0$ 軸の回りと反時計方向に角速度 ω_0 で回転しているということである．

特に

$$\boldsymbol{B}_0=(0,\ 0,\ B_0)$$

ととり，初期条件として

$$M_2(0)=0$$

ととると，式 (10.21) より

$$\begin{aligned} M_3(t)&=M_3(0)\cos\omega_0 t+M_3(0)(1-\cos\omega_0 t)\\ &=M_3(0)\end{aligned}$$

となり，第3成分は変化しない．また

$$\left.\begin{aligned} M_1(t)&=M_1(0)\cos\omega_0 t\\ M_2(t)&=M_1(0)\sin\omega_0 t\end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

となる．これから，反時計方向の回転であることは明らかであろう．($\gamma>0$ としての話)

[例 2]

$$B(t)=(B_1\cos\omega t,\ B_1\sin\omega t,\ B_0) \tag{10.24}$$

のときを考えよう．前の例ではスピノールを使うありがたさがあまり明らかではなかったが，今度はベクトルの計算より，かなりわかりやすいはずである．まず，式 (10.24) の場は z 軸の回りに反時計方向に回転している磁場だ

から，それといっしょに動く座標系に移ってみる．それには

$$\psi(t)=S_1(t)\psi_1(t) \tag{10.25}$$

なる変換をほどこす．すると $\psi_1(t)$ は式 (10.14) を満たすが，S_1 として$\{\cdots\}$が簡単になるように選ぶ．

$$S_1(t)=\cos\frac{1}{2}\omega t-i\sigma_3\sin\frac{1}{2}\omega t \tag{10.26}$$

と選ぶと，これは時計方向の回転であり，(したがって，$\psi_1(t)$ は $\psi_1(t)=S_1^{-1}(t)\psi(t)$ だからである．) 反時計方向の回転座標系でのスピノールとなる．

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_1(t)=\frac{1}{2}\sigma_3\omega S_1(t) \tag{10.27a}$$

$$S_1^{-1}(t)\sigma_1 S_1(t)=\sigma_1\cos\omega t-\sigma_2\sin\omega t \tag{10.27b}$$

$$S_1^{-1}(t)\sigma_2 S_1(t)=\sigma_1\sin\omega t+\sigma_2\cos\omega t \tag{10.27c}$$

のために

$$S_1^{-1}(t)\left[i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_1(t)+\frac{1}{2}\gamma\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}(t)S_1(t)\right]=\gamma\sigma_1B_1+\sigma_3(\gamma B_0+\omega) \tag{10.28}$$

となるから，$\psi_1(t)$ は簡単な方程式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_1(t)+\left\{\gamma\sigma_1B_1+\gamma\sigma_2\left(B_0+\frac{\omega}{\gamma}\right)\right\}\psi_1(t)=0 \tag{10.29}$$

を満たす．これは，磁場がすべて定数になっているから前の例と同様にして解ける．すなわち，**この反時計方向の回転座標系では**式 (10.21) によって解が得られる．ただしこの場合，

$$\boldsymbol{e}_0=(\gamma B_1,\ 0,\ \gamma B_0+\omega)/\omega_0 \tag{10.30a}$$

$$\omega_0=\sqrt{\gamma^2B_1^2+(\gamma B_0+\omega)^2} \tag{10.30b}$$

である．したがって，はじめの $\psi(t)$ は

$$\psi(t)=S_1(t)S(t-t_0)\psi(t_0) \tag{10.31}$$

となる．ここで，$S_1(t)$ は式 (10.26)，$S(t-t_0)$ は式 (10.16) と同じで

$$S(t-t_0)=\cos\frac{1}{2}\omega_0(t-t_0)+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_0\sin\frac{1}{2}\omega_0(t-t_0) \tag{10.32}$$

において，e_0, ω_0 として式(10.30)をとったものである．$\boldsymbol{M}(t)$ は，式(10.21)と同じで，式 (10.30) を代入してみると，特に第3成分は

$$M_3(t)=M_3(0)\left\{1-2(1-e_{03}{}^2)\sin^2\frac{1}{2}\omega_0(t-t_0)\right\} \tag{10.33}$$

となる．ただし，初期条件として

$$\boldsymbol{M}(0)=(0, 0, M_3(0))$$

とした．

$$1-e_{03}{}^2=\sin^2\theta$$

である．式 (10.33) から

$$M_3{}^{\max}=M_3(0)$$
$$M_3{}^{\min}=M_3(0)\cos 2\theta$$

ということがわかるから，$\boldsymbol{M}(t)$ は z 軸の回りを，角速度 ω で反時計方向に回転している座標系では，図 4.8 の実線の円上を反時計方向に回っていることになる．

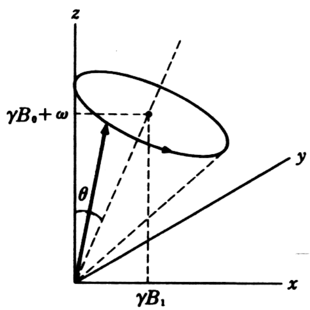


図 4.8

上のユニタリー変換の方法と併用すると便利な方法として，最後に，もう1つ便利な方法を紹介しておく．

$$S_n^{-1}(t)\left[i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_n(t)+\beta(t)S_n(t)\right]\equiv\beta_n(t) \tag{10.34}$$

とおくと，式 (10.14) は

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_n(t)+\beta_n(t)\psi_n(t)=0 \tag{10.35}$$

と書くことができる．$\beta_n(t)$ は，2行2列の行列だから，一般に

$$\beta_n(t)=\frac{1}{2}\gamma\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}_n(t) \tag{10.36}$$

と書くことができる．（式（10.36）には，$\boldsymbol{\sigma}$ を含まない項は出てこない．証明は，自ら試みよ.）そこで，式（10.35）の左から

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\beta_n(t)$$

をかけると

$$\begin{aligned}&\left[i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\beta_n(t)\right]\left[i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\beta_n(t)\right]\psi_n(t)\\&=\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_n(t)-\beta_n(t)\beta_n(t)\right]\psi_n(t)\\&=-\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-i\frac{1}{2}\gamma\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_n(t)+\frac{1}{4}\gamma^2\boldsymbol{B}_n{}^2(t)\right]\psi_n(t)=0\end{aligned} \tag{10.37}$$

となる．これは，非対角項にのみ $\dot{\boldsymbol{B}}_n(t)$ が入っているから，$S_n(t)$ によって，時間的変化の小さい $\boldsymbol{B}_n(t)$に変換しておくと，$\boldsymbol{B}_n$の時間的変化を摂動的に取り扱うことができる．特に，

$$\boldsymbol{B}_n(t)=(B_1,\ B_2,\ B_3(t)) \tag{10.38}$$

ならば，式（10.37）は対角項だけになり

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{i}{2}\gamma\sigma_3\dot{B}_3(t)+\frac{1}{4}\gamma^2(B_1{}^2+B_2{}^2+B_3{}^2(t))\right]\psi(t)=0 \tag{10.39}$$

を解けばよい．スピノールの成分を $u(t), v(t)$ とすると

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{i}{2}\gamma\dot{B}_3(t)+\frac{1}{4}\gamma^2\{B_1{}^2+B_2{}^2+B_3{}^2(t)\}\right]u(t)=0 \tag{10.40a}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{i}{2}\gamma\dot{B}_3(t)+\frac{1}{4}\gamma^2\{B_1{}^2+B_2{}^2+B_3{}^2(t)\}\right]v(t)=0 \tag{10.40b}$$

と分離してしまう．これを，数値的またはできれば解析的に解けばよい．

最後に，スピノール方程式（10.3）に戻り，それがユニークであるかどうかを考えておく．前に注意したように，スピノール方程式を（10.3）でなく

(10.8) にとっても，やはり (10.6) という式は成り立つ．しかし，たとえば ψ が与えられたとき，それを解としてもつような磁場 $\boldsymbol{B}(t)$ は何であろうかという問題を考えると，スピノールの不定性が現れてくる．それをみるために (10.8) のように$\eta(t)$ という項を入れておいて， 式 (10.5a)，式 (10.5b) に相当する方程式を作り，それらを加え合わせると，

$$i\psi^{\dagger}\sigma_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi^{\dagger}\sigma_i\psi+\gamma B_i\psi^{\dagger}\psi+2\eta\psi^{\dagger}\sigma_i\psi=0 \tag{10.41}$$

したがって

$$B_i(t)=-\frac{i\psi^{\dagger}\sigma_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi^{\dagger}\sigma_i\psi+2\eta(t)\psi^{\dagger}\sigma_i\psi}{\gamma\psi^{\dagger}(t)\psi(t)} \tag{10.42}$$

となり，分子に第3項が出てくる．この η を全く勝手にとっても，式 (10.6) の関係は保たれる．Bloch 方程式というのは，元来，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{M}$ のベクトル積を制限する式であるから，$\boldsymbol{M}$ を与えても $\boldsymbol{B}$ が唯一に決まらないのは当然である．

また 式 (5.20) と同様に，スピノール方程式の解 $S(t, t_0)$ が得られたら，ベクトル方程式の解 $R_{ij}(t, t_0)$ を作るのは容易で

$$R_{ij}(t, t_0)=\frac{1}{2}T_r[\sigma_i S(t, t_0)\sigma_j S^{-1}(t, t_0)] \tag{10.33}$$

となる．

演習問題 IV

1. もし方程式 (2.1) がはじめに与えられているとすると，それが座標系の回転であるということがどうしてわかるだろうか？
2. 式 (3.8b) の -1 のほうは，必ず反転を含むことを確かめよ．
3. 3次元空間において，x 軸と y 軸を同時に反転すると，これは，1つの回転になる，ということを確かめよ．
4. Levi-Civita の全反対称テンソルにつき，恒等式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}=2\,!\,\delta_{il}$$

を導け。

5. 問題4の恒等式を使い

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})$$

を計算してみよ。

6. 問題4の恒等式を用い，式（4.13）の交換関係

$$[T_i,\ T_j]=i\epsilon_{ijk}T_k$$

を証明せよ。

7. 式（4.14）

$$[(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^2]_{ij}=\delta_{ij}-e_ie_j$$

$$[(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^3]_{ij}=[\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}]_{ij}$$

を導け。

8. 式（4.18）

$$a_{il}a_{jm}a_{kn}\epsilon_{lmn}=\epsilon_{ijk}\det(A)$$

を証明せよ。

9. 式（4.19）はどのようにしたら得られるか？

10. 2個の異なる単模ユニタリー行列の積は，また単模ユニタリー行列となる。このことを2行2列の場合に確認せよ。

11. Pauli 行列につき，次の関係を証明せよ。

$$[\sigma_i,\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}]=2i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\sigma})_i$$

$$\{\sigma_i,\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\}=2A_i$$

12. $$S=\exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}\theta\right]$$

のとき

$$S^{-1}\sigma_iS=a_{ik}\sigma_k$$

になるという計算式（5.19）を本文を見ないで追っかけてみよ。

13.
$$a_{ij}=\frac{1}{2}Tr[\sigma_i S \sigma_j S^{-1}]$$
を問題12の具体的なSを右辺に代入し，それが左辺に等しくなることを確認せよ．

14. 一般の2階のテンソルを，トレースが0の対称テンソル，反対称テンソル，Kronecker のデルタに比例する項の3個に分け，各項の独立成分の数を数えてみよ．p. 17の表と一致するだろうか？

15. スピノールの変換 $S(\boldsymbol{e}, \theta)$ において，$\theta=2\pi$ とすると，どうなるか？座標系を，ある軸の回りに360°回転したら，スピノールはどうなるであろうか？

V. 生成・消滅演算子

§1. は じ め に

Planck によって，エネルギー量子という概念が導入され，さらに Einstein による光量子仮説が提出されてから，Dirac が輻射場の量子力学を建設したいきさつについては，よく御存じのことと思う．光の量子は，古典力学や量子力学で扱う電子とは異なり，物質に吸収されたり，放出されたりして，その数が変わるのが特徴である．このように数の変わる量子を取り扱うには，この章で議論する生成・消滅演算子によるほかはない．量子光学や素粒子論では，これらの演算子が活躍する．

ここでは，場の量子論全体を紹介するわけにはいかないが，生成・消滅演算子の基礎的なこと，それら演算子の住む Fock space について簡単に議論しておく．

§2. 生成・消滅演算子

1. boson 生成・消滅演算子

Bose 統計に従う粒子を簡単に boson とよび，それを生成させたり消滅させたりする演算子を boson 生成・消滅演算子（簡単に **boson 演算子**）とよぶ．

それらをそれぞれ $a^\dagger$, a と書くと，それは交換関係

$$aa^\dagger - a^\dagger a = [a, a^\dagger] = 1 \tag{2.1a}$$

を満たす．もちろん

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \tag{2.1b}$$

である．ここで†は，エルミート共役の意味である．これらが，なぜ boson を生成させたり，消滅させたりするかを以下調べていこう．

まず，$a^\dagger$ や a は演算子だから，これらが演算する何かがなければならない．それを Dirac に従い，$|\rangle$ で表すが，この性質は追々明らかとなる．$|\rangle$ を（Hilbert 空間の中の）**ベクトル**という．なぜ a が消滅演算子であり，$a^\dagger$ が生成演算子であり，$|\rangle$ がベクトルとよぶにふさわしいものであるかということは，次の事情による：まず

$$N \equiv a^\dagger a \tag{2.2}$$

を定義する．すると，これはエルミートだから，対角化できるであろう．そして式（2.2）の形から，それの固有値はすべて0か正でなければならない．Nの固有値と固有ベクトルを，それぞれ $n, |n\rangle$ と書くと

$$N|n\rangle = n|n\rangle \tag{2.3a}$$

で，

$$n \geq 0 \tag{2.3b}$$

である．（nは0か正であるということ以外，まだわかっていない．）

そこで，nは，0および正の整数であることを，次のように証明する．まず，交関関係（2.1）とNの定義から，Nの固有ベクトル $|n\rangle$ について，次の関係が成り立つ

$$N\mathrm{a}|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \tag{2.4a}$$

$$Na^\dagger|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle \tag{2.4b}$$

これをみてわかることは，$|n\rangle$ に属するNの固有値がnなら，$a|n\rangle$ も $a^\dagger |n\rangle$ もN の固有ベクトルで，それぞれ固有値 $n-1$ と $n+1$ をもつということである．つまり a は固有値を1だけ減らし，$a^\dagger$ は1だけ増やす役割をしている．式(2.4)の関係は，いうまでもなく

$$[a, N]=a \tag{2.5a}$$

$$[a^{\dagger}, N]=-a^{\dagger} \tag{2.5b}$$

から出てきたものである．

さて，この操作をm(正の整数)回繰り返すと，

$$N\{a\}^{m}|n\rangle=(n-m)\{a^{m}\}|n\rangle \tag{2.6}$$

である．そこで，ある決まったnに対し，$m>n$としてしまうと，式 (2.6) は，Nが$n-m$という負の固有値をもつことになってしまい，式 (2.3b) と矛盾を生ずる．この矛盾は，次のような場合に限り起こらない．すなわち，$\{a\}^{m}|n\rangle$ 自身が$m>n$ のとき，0 になるとするわけである．いいかえると，われわれは，n と $n-1$ の間の正整数は必ず 1 個存在するから，それを m_0 としたとき，

$$\{a\}^{m_0}|n\rangle \fallingdotseq 0 \tag{2.7}$$

$$a\{a\}^{m_0}|n\rangle \equiv 0 \tag{2.8}$$

であるはずで，式 (2.8) の左から $a^{\dagger}$ をかけて式 (2.6) を用いると

$$a^{\dagger}a\{a\}^{m0}|n\rangle=N\{a\}^{m_0}|n\rangle=(n-m_0)\{a\}^{m_0}|n\rangle=0 \tag{2.9}$$

しかし，式(2.7)が成り立っているから，

$$n=m_0 \tag{2.10}$$

でなければならないことになる．これはnが負でない整数であるということである．これでnが 0 か正整数しかとれないということの証明終わりである．

いま $\{a\}^{m0}|m_0\rangle$ を簡単に $|0\rangle$ と書くと，式 (2.8) により

$$a|0\rangle=0 \tag{2.11}$$

かつ

$$N|0\rangle=0 \tag{2.12}$$

が成り立つ．つまり $|0\rangle$ はNの最低固有値 0 に属する固有ベクトルである．Nの固有値は 0 と正整数に限られるから，Nのことを**粒子数演算子**とよぶ．また，$|0\rangle$ は，粒子数 0 の固有ベクトルだから，それを**真空**とよぶ．

いま，真空状態 $|0\rangle$ を

$$\langle 0|0\rangle=1 \tag{2.13}$$

と規格化しておくと,

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\{a^\dagger\}^n|0\rangle \qquad (2.14)$$

が, 完全規格化直交関数系をなす. 証明は, 交換関係 (2.1)を用い, 帰納法によるのがよい. つまり

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'} \qquad (2.15)$$

また, 完全性

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = I \qquad (2.16)$$

を証明することもできる. 元気があったら自らやってみてほしい.

Nの固有値は, 0, 1, 2,…で, それを粒子数と考えると, $a^\dagger$は粒子を1個増やし, aは1個減らすので, $a^\dagger$ や aがそれぞれ**生成・消滅演算子**とよばれるわけである. また, 1つの状態に存在する粒子数を考えれば, これらの粒子はBose 統計に従うものである. この理由によって, 交換関係 (2.1) を満たす演算子 $a^\dagger$ と aをそれぞれ, **boson 生成・消滅演算子**とよぶ.

上の議論は, かなり抽象的であったが, aや $a^\dagger$ をもっと具体的に目で見たかったら, 次のようにすればよい. 式 (2.4a) まで戻り, 左から$\langle n'|$をかけると

$$\langle n'|Na|n\rangle = n'\langle n'|a|n\rangle = (n-1)\langle n'|a|n\rangle \qquad (2.17)$$

$$\therefore \quad (n'-n+1)\langle n'|a|n\rangle = 0 \qquad (2.18)$$

したがって

$$\langle n'|a|n\rangle \neq 0 \qquad n' = n-1 \qquad (2.19)$$

同様に, 式 (2.4b)より

$$\langle n|a^\dagger|n'\rangle \neq 0 \qquad n' = n-1$$

しかし

$$\langle n|N|n\rangle = n = \sum_{n'=0}^{\infty}\langle n|a^\dagger|n'\rangle\langle n'|a|n\rangle$$

$$= \sum_{n'=0}^{\infty}|\langle n-1|a|n\rangle|^2 \qquad (2.20)$$

である．ここでは，完全性の条件(2.16)を用いた．式(2.20)から，

$$\langle n-1|a|n\rangle=\sqrt{n}\,e^{i\phi_n} \tag{2.21a}$$

$$\langle n|a^{\dagger}|n-1\rangle=\sqrt{n}e^{-i\phi_n} \tag{2.21b}$$

これらを具体的に書き出すと，位相因子を除外して，

$$a=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

$$a^{\dagger}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \end{bmatrix} \tag{2.22b}$$

となる．固有ベクトルのほうは，

$$|0\rangle=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad |1\rangle=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad |2\rangle=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdots \tag{2.23}$$

となる．式 (2.22)，式 (2.23)の具体的な形を用いて交換関係(2.1)や，式(2.5)などを試してみるとよい．Bose 統計に従うのは，光子，パイ中間子などである．

2．fermion の生成・消滅演算子

1個の状態に1個までしか入れない粒子を Fermi 統計に従う粒子という．これには，ニュートリノ，電子，ミュー中間子，陽子，中性子などがある．このような粒子の生成・消滅を取り扱うためには，粒子数演算子Nの固有値が0か1しかとりえないような代数を考えなければならない．次のような演算

子 $c^\dagger, c$ がこの要求を満たす．

$$cc^\dagger+c^\dagger c\equiv\{c, c^\dagger\}=1 \tag{2.24a}$$

$$\{c, c\}=\{c^\dagger, c^\dagger\}=0 \tag{2.24b}$$

$$N=c^\dagger c \tag{2.25}$$

をとると

$$[c, N]=c \tag{2.26a}$$

$$[c^\dagger, N]=-c^\dagger \tag{2.26b}$$

であることがすぐわかるから，boson 演算子のときと同様にして，$c^\dagger$ と c がそれぞれ生成・消滅演算子であることがいえる．ところで，この場合には反交換関係 (2.24)のために

$$NN=c^\dagger cc^\dagger c=c^\dagger(c^\dagger c+1)c=c^\dagger c=N \tag{2.27}$$

となるから，Nの固有値は，0と1でしかありえない．それぞれの固有ベクトルを $|0\rangle, |1\rangle$ と書くと，

$$N|0\rangle=0 \tag{2.28a}$$

$$N|1\rangle=|1\rangle \tag{2.28b}$$

である．

前と同様にして，$c^\dagger, c$ の具体的な表現を得ることは容易で，この場合には

$$c=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c^\dagger=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$N=c^\dagger c=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$|0\rangle=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

となる．規格化と完全性は

$$\langle n'|n\rangle=\delta_{nn'} \qquad (n, n'=0, 1) \tag{2.32a}$$

$$\sum_{n=0,1}|n\rangle\langle n|=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.32b}$$

である．

$c^\dagger$, c を，fermion 生成・消滅演算子という．

§3. 調和振動子およびコヒーレント状態

§2 で導入した boson，fermion 演算子は，実は，調和振動子と深い関係がある．調和振動子とは，

$$\dot{p} = -\omega^2 q \tag{3.1a}$$

$$\dot{q} = p \tag{3.1b}$$

で記述される物理系のことである．

boson 演算子が式(3.1)と同等であることを示すには，

$$q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\{a\mathrm{e}^{-i\omega t} + a^\dagger \mathrm{e}^{i\omega t}\} \tag{3.2a}$$

$$p(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\{a\mathrm{e}^{-i\omega t} - a^\dagger \mathrm{e}^{i\omega t}\} \tag{3.2b}$$

とおく．これは，容易にわかるように，式 (3.1)を満たしている．

ところで，式 (3.2)を用いると

$$p(t)q(t) = -i\frac{\hbar}{2}\{aa\mathrm{e}^{-2i\omega t} - a^\dagger a + aa^\dagger - a^\dagger a^\dagger \mathrm{e}^{2i\omega t}\} \tag{3.3a}$$

$$q(t)p(t) = -i\frac{\hbar}{2}\{aa\mathrm{e}^{-2i\omega t} + aa^\dagger - a^\dagger a - a^\dagger a^\dagger \mathrm{e}^{2i\omega t}\} \tag{3.3b}$$

$$p^2(t) = -\frac{\hbar\omega}{2}\{aa\mathrm{e}^{-2i\omega t} - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger \mathrm{e}^{2i\omega t}\} \tag{3.3c}$$

$$q^2(t) = \frac{\hbar}{2\omega}\{aa\mathrm{e}^{-2i\omega t} + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger \mathrm{e}^{2i\omega t}\} \tag{3.3d}$$

が得られるが，これら 4 個の量の線形結合として，時間に依存しないものは

$$p(t)q(t) - q(t)p(t) = -i\hbar \tag{3.4a}$$

$$H \equiv \frac{1}{2}\{p^2(t) + \omega^2 q^2(t)\} = \frac{1}{2}\hbar\omega\{a^\dagger a + aa^\dagger\} = \hbar\omega\{a^\dagger a + \frac{1}{2}\} \tag{3.4b}$$

の 2 個である．これは正に，Hamiltonian (3.4b)をもつ，量子力学的な調和振動子である．この Hamiltonian (3.4b)は，明らかに，固有値

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.5}$$

をもつ.

Hamiltonian (3.4b)と交換関係(3.4a)を用いると, Heisenberg の運動方程式として, 前の式 (3.1)を再現することもできる. すなわち,

$$i\hbar\dot{p}=[p,H]=\omega^2[p,g]q=-i\hbar\omega^2 q \tag{3.6a}$$

$$i\hbar\dot{q}=[q,H]=[p,q]p=i\hbar p \tag{3.6b}$$

である.

fermion 演算子についても, ほとんど同じで,

$$q(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\{ce^{-i\omega t}+c^\dagger e^{i\omega t}\} \tag{3.7a}$$

$$p(t)=-i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\{ce^{-i\omega t}-c^\dagger e^{i\omega t}\} \tag{3.7b}$$

とおく. この形から, 式(3.1)が成り立つことは明らかであろう. ただし, 今回は, $c, c^\dagger$ が反交換関係を満たしているために式 (3.4a)や式 (3.4b)は出てこない. つまり

$$p(t)q(t)=-i\frac{\hbar}{2}\{-c^\dagger c+cc^\dagger\} \tag{3.8a}$$

$$q(t)p(t)=-i\frac{\hbar}{2}\{c^\dagger c-cc^\dagger\} \tag{3.8b}$$

$$p^2(t)=\frac{\hbar\omega}{2}\{cc^\dagger+c^\dagger c\}=\frac{1}{2}\hbar\omega \tag{3.8c}$$

$$q^2(t)=\frac{\hbar}{2\omega}\{cc^\dagger+c^\dagger c\}=\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\omega} \tag{3.8d}$$

したがって, 式 (3.4)の代わりに

$$p(t)q(t)+q(t)p(t)=0 \tag{3.9a}$$

$$H\equiv\frac{i}{2}\omega\{q(t)p(t)-p(t)q(t)\}$$

$$=i\omega q(t)p(t)=\hbar\omega\{c^\dagger c-\frac{1}{2}\} \tag{3.9b}$$

が得られる．式 (3.9b) のような Hamiltonian は，今までに出てきたことはないし，式 (3.9a)のほうも，今まで出てきたことのない関係である．しかし，式 (3.9) で表される物理系は，量子力学的には可能である．式 (3.9b) からわかるように，Hamiltonian の固有値は

$$E_n=\hbar\omega\left(n-\frac{1}{2}\right) \qquad n=0,1 \tag{3.10}$$

しかも，Heisenberg の運動方程式として式(3.1)が再現できる．事実

$$i\hbar\dot{p}=[p, H]=-\frac{i}{2}\omega\{p^2q-pqp-pqp+qp^2\}$$

$$=-i\omega\{p^2q+qp^2\}=-i\hbar\omega^2q \tag{3.11a}$$

$$i\hbar\dot{q}=[q, H]=-\frac{i}{2}\omega\{qpq-q^2p-pq^2+qpq\}$$

$$=i\hbar p \tag{3.11b}$$

である．ここでは式 (3.8c,d)，式 (3.9) を用いた．つまり，fermion 系は，Hamiltonian (3.9b) をもち，演算子が式 (3.8c,d)，式 (3,9a) を満たすような調和振動子と同等であるということができる．

式 (3.5) や式 (3.10) に出てきた $\pm\hbar\omega\frac{1}{2}$ という項が，**零点振動**といわれる項である．

［コヒーレント状態］

コヒーレント状態は，量子光学で重要だからここでちょっと触れておく．任意のベクトル $|\rangle$ は，完全直交ベクトル $|n\rangle$ で展開できるが，その展開係数を適当に選ぶと，$|\rangle$ が boson 消滅演算子 a の固有ベクトルになる．a はエルミートでないから，このことはあたりまえではない．

$$|\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\beta_n \tag{3.12}$$

としよう．β_nは，展開係数である．式 (3.12) の左から $\langle m|$ をかけると

$$\langle m|\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\langle m|n\rangle\beta_n=\beta_m \tag{3.13}$$

したがって式 (3.12) は

$$|\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\rangle \tag{3.14}$$

これは，完全性の条件 (2.16)から，実はあたりまえである．

さて，あるベクトル $|f\rangle$ が固有値 f に属する a の固有状態であるとすると

$$a|f\rangle=f|f\rangle \tag{3.15}$$

(一般に f は複素数である．) この $|f\rangle$ を式 (3.14)のように展開すると

$$|f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|f\rangle \tag{3.16}$$

この方程式の左から a をかけて

$$a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{3.17}$$

を用いると，

$$a|f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a|n\rangle\langle n|f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\,|n-1\rangle\langle n|f\rangle \tag{3.18}$$

式 (3.15)により

$$f|f\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}f|n-1\rangle\langle n-1|f\rangle \tag{3.19}$$

$$\therefore\quad \sqrt{n}\langle n|f\rangle=f\langle n-1|f\rangle \qquad n=1, 2, \cdots \tag{3.20}$$

したがって

$$\langle n|f\rangle=\frac{f^n}{\sqrt{n!}} \tag{3.21}$$

である．ということは，a の固有値方程式 (3.15)は，

$$\begin{aligned}|f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\frac{f^n}{\sqrt{n!}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle\\&=e^{fa^\dagger}|0\rangle\end{aligned} \tag{3.22}$$

によって満たされるということになる．これが a の固有ベクトルである．この固有ベクトルを**コヒーレント状態**という．

§4. 場の量子化と Fock 空間

§3では，生成・消滅演算子が調和振動子と同等であることを証明した．一方，II章の§2では，波動関数 ψ が，無限個の調和振動子と同等であることを

みた．これらをいっしょにすると，波動方程式を満たす関数を，生成・消滅演算子として表現できることになる．そうすると，光子や電子の数が変わるような現象も取り扱うことができるようになる．このことを勉強しよう．

まず，粒子にはいろいろと異なった運動量などをもったものがあるから，それらを表現するために生成・消滅演算子の代数を拡張しなければならない．生成・消滅演算子がベクトルのラベル $\boldsymbol{k}$ をもつとし，式 (2.1)の関係を

$$[a_{\boldsymbol{k}},\ a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{4.1a}$$

$$[a_{\boldsymbol{k}},\ a_{\boldsymbol{k}'}]=[a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger},\ a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}]=0 \tag{4.1b}$$

と拡張する．

§2 の議論を，各 $\boldsymbol{k}$ について適用すると，全体の体系につき，粒子数が $\{n_{\boldsymbol{k}}\}$ である状態は

$$|\{n_{\boldsymbol{k}}\}\rangle=\prod_{\boldsymbol{k}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_{\boldsymbol{k}}!}}(a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger})^{n_{\boldsymbol{k}}}\right\}|0\rangle \tag{4.2}$$

で表される．ただし，$|0\rangle$ とは，すべての粒子に対する真空で，

$$a_{\boldsymbol{k}}|0\rangle=0 \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{k} \text{ につき}) \tag{4.3a}$$

$$\langle 0|0\rangle=1 \tag{4.3b}$$

を満たすようなものである．式(4.2)は完全直交系で，これによって張られる空間を **Fock 空間**という．全粒子数は

$$N=\sum_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k}} \tag{4.4}$$

で表され，それは明らかに

$$N|\{n_{\boldsymbol{k}}\}\rangle=\left(\sum_{\boldsymbol{k}}n_{\boldsymbol{k}}\right)|\{n_{\boldsymbol{k}}\}\rangle \tag{4.5}$$

を満たす．ベクトル(4.2)は，演算子 $a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$の順序を交換しても，その価は変わらない．(4.1b)によってすべての $a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$ は $a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}$ と交換するからである．

そこで，式 (3.2)に似せて

$$\phi(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\{a_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}+a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t}\} \tag{4.6a}$$

$$\pi(\boldsymbol{x},\ t)=-\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\{a_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}-a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t}\} \tag{4.6b}$$

という2個の場を定義する．ただし

$$\omega_k = c\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2} \tag{4.7a}$$

$$V = L_1 L_2 L_3 \tag{4.7b}$$

である．この定義 (4.6)，(4.7)をみると

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t) = \pi(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.8a}$$

$$\dot{\pi}(\boldsymbol{x}, t) = c^2(\nabla^2-\kappa^2)\phi(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.8b}$$

が成り立つことがすぐわかる．これらの方程式をいっしょにすると

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(\nabla^2-\kappa^2)\right]\phi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{4.9}$$

という，前に考えた Klein-Gordon 方程式に到達する．(III章 式(7.14)参照)

式 (4.1)の交換関係を用いると，式 (4.6)の量は

$$[\pi(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{x}', t)] = -i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{4.10a}$$

$$[\pi(\boldsymbol{x}, t), \pi(\boldsymbol{x}', t)] = [\phi(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{x}', t)] = 0 \tag{4.10b}$$

を満たす演算子であることがわかる．つまり $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ は**量子化された場**であり，$\pi(\boldsymbol{x}, t)$ はその正準共役運動量である．そしてこの場は，Bose 統計に従う複数個の粒子を表している．

Hamiltonian は，

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right) \tag{4.11}$$

ととればよい．これが正しい Hamiltonian であるということは，Heisenberg の運動方程式を計算して式 (4.8)が得られることを確認すればよい．

この Hamiltonian 式 (4.11)を場の量 ϕ と π で書くためには，式 (4.6)を逆に解いて

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V d^3x \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\{\omega_k\phi(\boldsymbol{x}, t) + i\pi(\boldsymbol{x}, t)\} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}+i\omega_k t} \tag{4.12a}$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V d^3x \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\{\omega_k\phi(\boldsymbol{x}, t) - i\pi(\boldsymbol{x}, t)\} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-i\omega_k t} \tag{4.12b}$$

を，式(4.11)に代入する．少々めんどうな計算の後

$$H=\frac{1}{2}\int_V d^3x\{\pi(\boldsymbol{x},t)\pi(\boldsymbol{x},t)$$
$$+c^2\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)+c^2\kappa^2\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\} \tag{4.13}$$

が得られる．この Hamiltonian の固有値は

$$E(\{n_{\boldsymbol{k}}\})=\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\{n_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\}$$
$$n_{\boldsymbol{k}}=0,1,2,\cdots\quad (\text{各 } \boldsymbol{k} \text{ について}) \tag{4.14}$$

であり，固有ベクトルは式 (4.2) である．

物理的意味は，明らかと思うが，一応書いておく．状態 (4.2) には，波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ およびエネルギー $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ をもった粒子が $n_{\boldsymbol{k}}$ 個ずつ存在する．式 (4.7a) によると

$$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}=c\sqrt{(\hbar\boldsymbol{k})^2+(\hbar\kappa)^2} \tag{4.15}$$

だから相対論的な関係

$$E=c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0{}^2c^2} \tag{4.16}$$

と比べると，この場の粒子は，運動量

$$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k} \tag{4.17}$$

をもち，静止質量

$$m_0=\frac{\hbar\kappa}{c} \tag{4.18}$$

をもっていることになる．波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ をもった粒子の数が $n_{\boldsymbol{k}}$ で，$n_{\boldsymbol{k}}$ は，0, 1, 2, …ととれるから，これは Bose 統計に従う粒子である．これらの量子が Bose 統計に従うということは統計力学を適用してみてもわかる．正準集合の分配関数を計算してみると，

$$Z_C=\prod_{\boldsymbol{k}}\sum_{n\boldsymbol{k}=0}^{\infty}e^{-\beta\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}(n_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2})} \tag{4.19}$$

そこで

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-a(n+\frac{1}{2})}=e^{-\frac{a}{2}}[1+e^{-a}+e^{-2a}+\cdots]$$
$$=e^{-\frac{a}{2}}\frac{1}{1-e^{-a}}\qquad(a\geq 0) \tag{4.20}$$

を用いると

$$Z_C=\prod_{k}\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}} \tag{4.21}$$

となる．

したがって，Helmholtz の自由エネルギーは，

$$F=-\frac{1}{\beta}\ln Z_C=-\frac{1}{\beta}\sum_{k}\ln\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}\right] \tag{4.22a}$$

$$=\frac{1}{\beta}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\ln\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}\right] \tag{4.22b}$$

分子に出ている零点エネルギーを省略すると，式 (4.22b) から，平均のエネルギーは

$$\langle E\rangle_C=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_C=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(1-e^{-\beta\hbar\omega_k})$$

$$=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1} \tag{4.23}$$

この積分の中に出てきた関数は，Bose 統計に従う粒子の分布に特徴的なものである．

もし，静止質量が 0，つまり $\varkappa=0$ ならば，式 (4.15) から $\omega_k=ck$ となり，式 (4.23) で与えられるエネルギーの平均値はよく知られた Planck の分布になっているはずである．事実

$$\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\cdots=4\pi\int_0^{\infty}dk\,k^2\cdots=\frac{4\pi}{c^3}\int_0^{\infty}d\omega\,\omega^2\cdots \tag{4.24}$$

を用いて式 (4.23) を書き直すと

$$\langle E\rangle_C=\frac{4\pi V}{(2\pi c)^3}\int_0^{\infty}d\omega\frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \tag{4.25}$$

という Planck の分布が得られる．(ただし，光子の場合には，光子の偏りからくる因子 2 が式 (4.25) にかかる．)

Fermi 粒子の集まりを表す場を，上と同様にして作ることはやさしいが，ここではそれをやらない．式 (4.6) から，量子化された場は，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の

粒子を生成させる項と，消滅させる項から成っている．同じように，光子を扱う場合は，電磁気学に出てくるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ を量子化された場として扱う．これは，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を持った光子を1個生成させる演算子と，1個消滅させる演算子の項から成っている．ここでは，原子による光子の生成と消滅を詳しく取り扱うわけにはいかない．というのは，これをやるためには，量子力学をさらに原子と光子の系に拡張しなければならない．これをここで行うのは，少々しんどいからである．

付録A Pauli スピン行列

Pauli のスピン行列について，必要なことをここでまとめておく．Pauli のスピン行列は 2 行 2 列の 3 個の行列から成り立っている．それらを通常

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\qquad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}\qquad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} \tag{1}$$

で表す．実は，これだけでは，任意の 2 行 2 列の行列を展開することができない．これら 3 個にもう 1 個

$$\sigma_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

を加えて，全部で 4 個の行列を考えると，任意の 2 行 2 列の行列は，これら 4 個の線形結合で表すことができる．それは，これらの 4 個を使うと，4 個の行列

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

を作ることができるからである．

とにかく，上の 4 個の行列（1）と（2）を σ_A $(A=0, 1, 2, 3)$ と表す．一方，（1）の 3 個だけなら σ_i $(i=1, 2, 3)$ と書く．つまり $A, B, C, \cdots$とかの大文字は 0, 1, 2, 3 を意味し，i, j, k などの小文字は，1, 2, 3 を表す．

（1）の表現から，次の反交換関係と交換関係が成り立つ：

$$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i\equiv\{\sigma_i, \sigma_j\}=2\delta_{ij} \tag{3}$$

$$\sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i\equiv[\sigma_i, \sigma_j]=2i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4}$$

これらから

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{5}$$

を導くのは容易であろう．たとえば

$$\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3$$

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\sigma_0$$

である．

$$Tr[\sigma_k]=0 \tag{6}$$

$$Tr[\sigma_0]=2 \tag{7}$$

を得るのも容易である．これらの関係を使うと

$$Tr[\sigma_A\sigma_B]=2\delta_{AB} \tag{8}$$

が得られるが，これは直交関数系のときの，直交性に相当する．

さて，任意の 2 行 2 列の行列 Y は σ_A の線形結合で表されるので，それを

$$Y=\sum_{A=0}^{3}\sigma_A y_A \tag{9}$$

とおく．y_A は展開係数で，それを求めるには，直交関数系のときにやったのと同じことをすればよい．左から σ_B をかけてトレースをとると

$$\begin{aligned}Tr[\sigma_B Y]&=\sum_{A=0}^{3}Tr[\sigma_B\sigma_A]y_A\\&=\sum_{A=0}^{3}2\delta_{AB}y_A=2y_B\end{aligned} \tag{10}$$

となる．

次に，完全性にあたる条件を求めるには，(10)を(9)に代入し，Yが任意であるということを使うとよい．すると

$$Y=\frac{1}{2}\sum_{A=0}^{3}\sigma_A Tr[\sigma_A Y] \tag{11}$$

これを，行列要素で書くと

$$(Y)_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum_{A=0}^{3}(Y)_{\mu\nu}(\sigma_A)_{\nu\mu}(\sigma_A)_{\alpha\beta} \tag{11'}$$

しかしYは任意だから，(11) は

$$\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\beta}=\frac{1}{2}\sum_{A=0}^{3}(\sigma_A)_{\nu\mu}(\sigma_A)_{\alpha\beta} \tag{12}$$

を意味する．これは σ_A の間に成り立つ恒等式で，**Fierz の恒等式**とよばれ

る．これが完全性に対応する．(12) を

$$\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\beta}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i)_{\nu\mu}(\sigma_i)_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\delta_{\nu\mu}\delta_{\alpha\beta} \tag{13}$$

と書いてもよい．

(11) を

$$Y=\frac{1}{2}\sum_i Tr[\sigma_i Y]\sigma_i+\frac{1}{2}Tr[Y]I \tag{14}$$

と書いて，次に 2 行 2 列の行列Xをかけてトレースをとると

$$Tr[YX]=\frac{1}{2}\sum_i Tr[Y\sigma_i]Tr[\sigma_i X]+\frac{1}{2}Tr[Y]Tr[X] \tag{15}$$

が得られるから

$$\sum_i Tr[Y\sigma_i]Tr[\sigma_i X]=2Tr[YX]-Tr[Y]Tr[X] \tag{15$'$}$$

となる．この恒等式は，IV章で使った．なかなか便利な式である．

式（5）をなんども使うと，次のような式が計算できる．

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{C})=i\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{\sigma}\cdot\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\}$$

などである．右辺はすべて σ_0 と $\boldsymbol{\sigma}$ の線形結合になっている．

付録B　デルタ関数を含む積分

デルタ関数を含む有用な積分を２，３挙げておこう．

〈１粒子の状態密度〉

非相対論的粒子

$$\rho_\omega^{NR}\,\mathrm{d}\Omega_k\cdots=\frac{V}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\,\delta\left(\omega-\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)\cdots$$

$$=\frac{V}{(2\pi)^3}m\sqrt{2m\omega}\,\mathrm{d}\Omega_k\cdots \tag{1}$$

相対論的粒子

$$\rho_\omega^{R}\,\mathrm{d}\Omega_k\cdots=\frac{V}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\,\delta(\omega-c\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2})\cdots$$

$$=\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\omega}{c^3}\sqrt{\omega^2-c^2\kappa^2}\,\mathrm{d}\Omega_k \tag{2}$$

また次のような積分は，統計力学において多くの粒子を問題にするときの状態密度を計算するのに有用である．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\,\delta({x_1}^2+\cdots+{x_N}^2-R^2)=\pi^{\frac{N}{2}}R^{N-2}/\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N{x_1}^2\,\delta({x_1}^2+\cdots+{x_N}^2-R^2)=\pi^{\frac{N}{2}}R^{N}/2\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \tag{4}$$

ここに，Γ と書いたのは，ガンマ関数のことで，n が正整数なら

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{5}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=(2n+1)!!\sqrt{\pi}/2^n \tag{6}$$

である．

演習問題ヒント

演習問題 I

1. 式 (2.3) より,

$$\ddot{y}_j=\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l \partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_l+\frac{\partial y_j}{\partial x_l}\ddot{x}_l$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \ddot{y}_j}{\partial \dot{x}_i}=2\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l \partial x_i}\dot{x}_l=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right]$$

$$\frac{\partial \ddot{y}_j}{\partial x_i}=\frac{\partial^3 y_j}{\partial x_l \partial x_k \partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_l+\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l \partial x_i}\ddot{x}_l=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right]$$

これらを用いると

$$\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_i}$$

$$=\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{y}_j}\right]+\cdots$$

が得られる.

2. $W=W(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial W}{\partial x_l}\dot{x}_l$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_l}\dot{x}_l$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]=-\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_l}\dot{x}_l$$

となり, 前半が証明される. 逆の証明は次のようにする. いま

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right]G\equiv 0 \tag{a}$$

とすると，左辺は

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial G}{\partial x_i}-\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}_i \partial x_l}\dot{x}_l-\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_l}\ddot{x}_l \tag{b}$$

これが恒等的に 0 とならなければならないが，$\ddot{x}_l$ はこの最後の項以外にありえないから，その係数が 0 でなければならない．したがって

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_l}\equiv 0 \tag{c}$$

$$\therefore \quad G=f_k(x_1, \cdots, x_N)\dot{x}_k+g(x_1, \cdots, x_N) \tag{d}$$

これを(b)に代入すると

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}=0$$

が得られるから，$g=\text{const}$ そこで

$$f_k(x_1, \cdots, x_N)\equiv\frac{\partial W}{\partial x_k}$$

なるWを導入すると

$$G=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\text{const.}$$

3. 球面座標をとると

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\phi \\ y&=r\sin\theta\sin\phi \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} p_x&=m\dot{x} \\ p_y&=m\dot{y} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

(a)を(b)に代入して計算すると

$$L_z=xp_y-yp_x=mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

となる．

4. 式（3.14）により得られる関係

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{X}+\frac{m_2}{M}\boldsymbol{x}$$

$$x^{(2)} = X - \frac{m_1}{M} x$$

を用いる.

5. 略

6. 略

7.
$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + g m x$$

したがって，空間推進に対して不変ではない.

8.
$$L = m \dot{X}^2 - \frac{m}{4} \dot{x}^2 + V(|x|)$$

となる. 第2項の負号のために，エネルギーが負になる.

9.
$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right] \neq 0$$

10.
$$m \ddot{x} = \dot{p} - \frac{e}{c} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} A - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} A$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

の2式を組み合わせればよい.

11. 略

12.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_1(q, Q ; t) = \frac{\partial W_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial W_1}{\partial t}$$

と書いて，両辺を比較する.

13. Poisson 括弧の定義を用いて，たんねんに計算する以外にない.

14. 拙著："量子力学を学ぶための解析力学入門"参照.

演習問題 II

1.
$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = p_n^*$$

$$q_n=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ik_nx}\,\psi(x,\ t)$$

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{ik_nx}\,\dot{\psi}(x,\ t)$$

これらを用いると

$$H=\frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x\left\{\dot{\psi}(x,\ t)\dot{\psi}(x,\ t)+c^2\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial x}\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial x}\right\}$$

となる.

2.
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\epsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{e}^{-\epsilon x}-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{e}^{\epsilon x}\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\epsilon+ik}-\frac{1}{\epsilon-ik}\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2ik}{\epsilon^2+k^2}$$

3.
$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax^2}\mathrm{e}^{-ikx}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a\left(x-\frac{i}{a}k\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}k^2}$$

を用いる.

4.
$$\mathrm{d}^3x=r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

を用いよ.

5. 一般論によって，これは分散関係を満たしているが，式 (6.26) を直接確かめよ.

6. $\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0$ だから，$\boldsymbol{e}_k^{(1)}$，$\boldsymbol{e}_k^{(2)}$ 方向の成分しか効かない.

演習問題 III

1. $ax=y$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\delta(ax)f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\delta(y)f\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{1}{a}f(0) & a>0\\[2ex] \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}\mathrm{d}y\,\delta(y)f\left(\frac{y}{a}\right)=-\frac{1}{a}f(0) & a<0\end{cases}$$

2. $$\delta((x-a)(x-b))=\begin{cases}\delta((a-b)(x-a)) \\ \qquad =\dfrac{1}{|a-b|}\delta(x-a) & x\sim a \\ \delta((b-a)(x-b)) \\ \qquad =\dfrac{1}{|a-b|}\delta(x-b) & x\sim b\end{cases}$$

3. $$\delta(x^2-a^2)=\delta((x-a)(x+a))=\frac{1}{2|a|}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}$$

4. $$f(x)=\prod_i (x-x_i)g(x)$$

を用いるとよい.

5. Stokes の式は,

$$\int_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\cdots)=\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla(\cdots)$$

図 3.3を参照すると, S 上では

$$\delta(f(\boldsymbol{x})-c)\theta(d-g(\boldsymbol{x}))$$

であるから, 面要素のときと同様にすればよい.

6. 右辺第 1 項が回路の運動による項.

7. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_S}{\mathrm{d}t}\rho-\boldsymbol{J}\right)-\int_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\left(c^2\boldsymbol{B}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_l}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{E}\right)$$

8. 対称性から

$$\int \mathrm{d}^3x\, x_i\,\delta(r-a)\,\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})=A e_i$$

$\boldsymbol{e}=(0, 0, 1)$ としてAをきめると $A=0$,

次に対称性から

$$\int \mathrm{d}^3x\, x_i x_j\,\delta(r-a)\,\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})=A\delta_{ij}+B e_i e_j$$

同様にしてA, Bを決めると

$$A+B=0$$

$$3A+B=\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{x}^2\delta(r-a)\,\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})=2\pi a^3$$

$$\therefore \quad A=-B=\pi a^3$$

9.
$$\rho=\begin{cases}\rho_0 & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$
$$=\rho_0\theta(a-r)$$
$$\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{2}{r}E_r=\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\theta(a-r)$$

を解くと

$$E_r=\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r\,\theta(a-r)+\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\theta(r-a)$$

10. 式 (6.7) を用いると，式 (6.9) が解であることはすぐわかる．$t\to t_0$ とすると，積分は 0 となる．

11. 10と同じ．

12. ω を複素面で考えると，$i\epsilon$ のために被積分関数の極は下半面にのみ現れる．$t-t_0<0$ のときは，積分路を図 a のようにとると，その中に極はないから，0 となる．

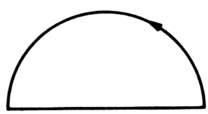


図 a

13. 問題II．4 と同じ．

14.
$$\delta(k^2+\kappa^2)=\delta(\boldsymbol{k}^2+\kappa^2-k_0{}^2)$$

演習問題 IV

1. 変換された座標軸の方向を見いだすためには次のようにする (図 b)．x' 軸上では $y'=0$ だから，

$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta=0$$

によって x' 軸が定まる．次に y' 軸上では $x'=0$ だから

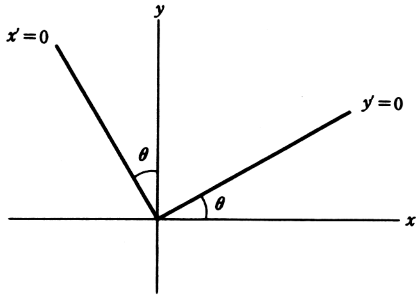


図 b

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta=0$$

によって y' 軸が定まる．

2．a_{ij} が対角的であるときについて考えると，直交行列の性質により

$$a_{11}{}^2=a_{22}{}^2=a_{33}{}^2=1$$

したがって

$$a_{11}=\pm1,\qquad a_{22}=\pm1,\qquad a_{33}=\pm1$$

したがって，$\det(a)=-1$ であるのは，a_{11}，a_{22}，a_{33}のうち，どれか 1 個か全部が -1 のときである．これは，反転である．(次の問題参照)

3．
$$x'=-x$$
$$y'=-y$$
$$z'=z$$

は，式 (4.10) において $\theta=\pi$ としたときである．つまり，z 軸のまわりの180°の回転である．

4．
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=a(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})$$

とおいて，a を決めればよい．

5．前問の式を使うと

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

6．
$$(T_iT_j)_{lk}=-\epsilon_{ilm}\epsilon_{jmk}=\delta_{ij}\delta_{lk}-\delta_{ik}\delta_{jl}$$
$$(T_jT_i)_{lk}=\delta_{ij}\delta_{lk}-\delta_{jk}\delta_{il}$$

$$\therefore \quad ([T_i, T_j])_{lk} = \delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}$$

一方

$$i\epsilon_{ijn}(T_n)_{lk} = \epsilon_{ijn}\epsilon_{nlk} = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{jl}\delta_{ik}$$

7.
$$\begin{aligned}((\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^2)_{ij} &= (T_k T_l)_{ij} e_k e_l \\ &= -\epsilon_{kim}\epsilon_{lmj} e_k e_l = \delta_{ij} - e_i e_j \\ ((\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^3)_{ij} &= ((\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})^2)_{il}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})_{lj} \\ &= (\delta_{il} - e_i e_l)(-i\epsilon_{mlj} e_m) \\ &= -i\epsilon_{mij} e_m = (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e})_{ij}\end{aligned}$$

8. まず

$$a_{il}a_{jm}a_{kn}\epsilon_{lmn}$$

が，i，j，k について反対称であることを示す．そこで $i=1$，$j=2$，$k=3$ とおき

$$a_{1l}a_{2m}a_{3n}\epsilon_{lmn} = \det(A)$$

であることを示せばよい．

9. 式 (4.18) に a_{kt} をかけて k について加える．

すると

$$a_{il}a_{jm}\epsilon_{lmt} = \epsilon_{ijk}a_{kt}$$

が得られるから，この式を書き直す．

10.
$$S_1 = \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} c & -d^* \\ d & c^* \end{bmatrix}$$

とすると

$$S_1S_2 = \begin{bmatrix} ac - b^*d & -(bc + a^*d)^* \\ bc + a^*d & (ac - b^*d)^* \end{bmatrix}$$

$$|ac - b^*d|^2 + |bc + a^*d|^2 = (|c|^2 + |d|^2)(|a|^2 + |b|^2)$$

したがって

$$|c|^2 + |d|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

なら，S_1S_2 は単模ユニタリー変換となる．

11.
$$[\sigma_i, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}] = [\sigma_i, \sigma_j]A_j = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k A_j$$

$$\{\sigma_i,\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\}=\{\sigma_i,\ \sigma_j\}A_j=2A_i$$

12. 略

13.
$$S=A+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$A=\cos\frac{\theta}{2},\qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}\sin\frac{\theta}{2}$$

あとは

$$Tr[\sigma_i\sigma_j]=2\delta_{ij}$$
$$Tr[\sigma_i\sigma_j\sigma_k]=2i\epsilon_{ijk}$$
$$Tr[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l]=2(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

を用いればよい。

14. $$T_{ij}=\left\{\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}\right\}+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})+\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}$$

5　　　　　3　　　　　1

15. $\theta=2\pi$ とすると

$$\cos\frac{\theta}{2}=-1,\qquad \sin\frac{\theta}{2}=0$$
$$\therefore\quad S=-1$$

つまり，座標系を 360° 回転しても，スピノールは，もとへもどらず，符号が変わる。

索　引

著者紹介

高橋　康

1951年　名古屋大学理学部卒業
現　在　Professor Emeritus, Department of Physics,
University of Alberta

NDC 421　176 p.　21cm

物理数学ノート

1992年 3 月20日　第 1 刷発行
1992年10月20日　第 2 刷発行

定　価　2,300円(本体 2,233円)
著　者　高橋　康
発行者　野間佐和子
発行所　株式会社　講談社
〒112-01 東京都文京区音羽2-12-21
販売部　(03)5395-3624
製作部　(03)5395-3615
編　集　株式会社　講談社サイエンティフィク
代表　加藤勝久
〒162 東京都新宿区新小川町9-25 日商ビル
編集部　(03)3235-3701
印刷所　新日本印刷 株式会社・半七写真印刷工業 株式会社
製本所　株式会社 国宝社

ISBN 4-06-153204-9　(KS)